



UNIVERSITÀ DI GENOVA
Dipartimento di Fisica

LAUREA MAGISTRALE IN FISICA
28 ottobre 2020

**Studio e mitigazione
del rumore newtoniano
nei rivelatori di onde gravitazionali**

Relatore:
Prof. Andrea Chincarini

Correlatore:
Prof. Fabrizio Parodi

Candidato:
Martina Pulze

ANNO ACCADEMICO 2019/2020

Dedico questo lavoro alla mia famiglia,
che mi ha sempre sostenuto ed aiutato
in questo lungo percorso.

Sommario

Questa tesi si inserisce, parallelamente ad un lavoro di dottorato, nell'ambito dello studio del rumore newtoniano che interessa l'interferometro italiano Virgo, avente sede a Cascina. Questo strumento è soggetto ad una serie di disturbi che ne limitano la sensibilità nella rivelazione delle onde gravitazionali (GW), oggetti fisici di grande interesse scientifico il cui studio ha subito una svolta notevole negli ultimi anni. L'obiettivo comune al gruppo di ricerca con cui ho collaborato è la mitigazione di una di queste sorgenti limitanti: il rumore newtoniano di origine sismica (SNN). Questo disturbo è legato ai gradienti di gravità prodotti dalle fluttuazioni di posizione (e al second'ordine di densità) della materia che circonda le masse di test dell'interferometro, ovvero gli specchi che costituiscono le cavità Fabry-Perot, che sono gli oggetti fisici sensibili alle perturbazioni prodotte dalle GW. Le fluttuazioni di masse indotte dalle onde sismiche nel suolo generano fluttuazioni di gravità che, accoppiandosi direttamente con le masse di test, causano un rumore di spostamento in diretta competizione con lo spostamento prodotto dal passaggio di un'onda gravitazionale. È quindi necessario provvedere ad una sua riduzione: infatti, questo tipo di rumore è quello che interesserà maggiormente la prossima configurazione di Advanced Virgo (AdV), limitando la sensibilità a basse frequenze nell'intervallo tra 5 e 50 Hz. Siccome AdV è un interferometro terrestre, l'approccio definito dalla collaborazione per la mitigazione del SNN comporta la stesura di un array di sensori sismici attorno alla massa di test: monitorando le fluttuazioni di posizione locali, è possibile inferire la forza newtoniana agente sugli specchi, attraverso il legame di correlazione con i sensori in funzione della frequenza e della loro posizione.

Il mio lavoro è stato quello di mettere a punto un sistema che ottimizzasse la disposizione dei sensori sismici, per localizzarli in posizioni dove l'informazione sulla forza newtoniana sia massima, in maniera tale da utilizzarne il minor numero possibile. A questo scopo, sono state effettuate delle simulazioni ad elementi finiti (FE), utili anche a valutare la forza newtoniana agente sulla massa di test, non calcolabile analiticamente. Questo sistema, messo a punto e validato su un particolare modello – seppur semplificato –, ha dato dei risultati promettenti sia sul posizionamento che sul numero ottimale dei sensori sismici di cui disporre per la valutazione del rumore newtoniano.

INDICE

1	Introduzione	1
1.1	Relatività in “generale” ed equazione delle onde	1
1.1.1	Linearizzazione delle equazioni di Einstein	2
1.2	Sorgenti gravitazionali	6
1.2.1	Sorgenti periodiche	6
1.2.2	Sorgenti quasi-periodiche: binarie coalescenti	7
1.2.3	Sorgenti impulsive	8
1.2.4	Fondo stocastico	9
1.3	Rivelatori interferometrici	9
1.3.1	Funzionamento	11
1.3.2	Sorgenti di rumore limitanti	13
2	Rumore Newtoniano	23
2.1	Teoria onde sismiche	23
2.2	Fluttuazione del campo gravitazionale	27
2.3	Cancellazione rumore newtoniano	31
2.3.1	Filtro di Wiener	31
2.3.2	Modello per il rumore newtoniano	36
2.4	Ottimizzazione array di sensori	37
3	Modi normali	39
3.1	Modi normali: caratteristiche e prospettive d’uso	39
3.1.1	Mappe di correlazione con modi normali	41
3.1.2	Un dettaglio sul setup degli specchi	42
3.2	Modello 2D: “terreno” come corda massiva 1D	43
3.3	Condizioni di equivalenza: caso 3D	47
3.3.1	Software di simulazione	49
4	Software per le simulazioni	51
4.1	Calcolo ad elementi finiti (FE)	51
4.1.1	Procedura per l’applicazione di un metodo numerico	52
4.2	Problema di Lamb	53
4.3	Analisi numerica ad elementi finiti (FEA)	55

4.3.1	Analisi del fenomeno dell'attrito attraverso il FEM	55
4.4	COMSOL vs ANSYS	57
4.5	ANSYS APDL	63
5	Pattern 3D	65
5.1	Modello di test 3D	65
5.2	Pattern teorico atteso dalla sollecitazione	67
5.3	Risultati soluzioni modali	69
5.3.1	Mappe di sensitività 3D	70
5.3.2	Densità dei modi	71
6	Soluzioni pseudo-temporali	73
6.1	Costruzione di soluzioni pseudo-temporali	74
6.2	Approccio iniziale	75
6.2.1	Ampiezze uniformi	75
6.2.2	Ampiezze in funzione della densità modale	77
6.2.3	Analisi e confronto delle mappe di correlazione in 3D	78
6.2.4	Ruolo della fase	80
6.2.5	SNR vs frame	81
6.3	Generalizzazione	81
6.3.1	Coefficienti casuali gaussiani	82
7	Validazione e discussione	85
7.1	Soluzione temporale	85
7.1.1	Comportamento dei coefficienti temporali	86
7.2	Verifica interna tra soluzioni	89
7.2.1	Non-ortogonalità dei modi	90
7.2.2	Ortogonalizzazione tramite Gram-Schmidt	91
7.2.3	Comparazione mappe di correlazione in 3D	92
7.3	Discussione	94
7.3.1	Soluzioni temporali	94
7.3.2	Validazione "sul campo"	95
7.3.3	Modello completo e mappe di correlazione	95
8	Conclusioni	97
A	Correlazione e densità spettrale	99
A.1	Quantità probabilistiche e statistiche	99
A.1.1	Valore atteso	99
A.1.2	Covarianza.	99
A.1.3	Varianza	100
A.1.4	Deviazione standard	100
A.2	Indice di correlazione	100
A.2.1	Correlazione e quantità vettoriali	101
A.3	Segnali in tempo e in frequenza	101
A.3.1	Dominio del tempo	102
A.3.2	Dominio della frequenza	102
A.3.3	Teorema Wiener-Khinchin (o di Wiener-Kolmogorov)	103

B	Complemento sulle funzioni complesse	105
B.1	Funzioni complesse	105
B.2	Derivabilità in senso complesso	106
B.2.1	Fatti equivalenti	106
B.3	Differenziabilità	107
B.3.1	Derivate di Wirtinger	108
B.3.2	Funzioni olomorfe	108
B.3.3	Funzioni complesse e casi rilevanti.	109
C	Cancellazione NN: uso di reti neurali	111
C.1	Intelligenza artificiale	111
C.1.1	Sistemi esperti	111
C.1.2	Sistemi adattivi	112
C.2	Sensori sismici e reti neurali	112
D	Listati	115
D.1	Modello di test	115
D.1.1	Soluzione modale	115
D.1.2	Soluzione temporale	118
D.2	Modello completo	122
D.2.1	Soluzione modale	122
D.2.2	Soluzione temporale	133
E	Modelli avanzati	137
E.1	Procedimento di modellizzazione	137
E.1.1	Modelli in AutoCAD	137
E.2	Piante	139
E.2.1	NEB	139
E.2.2	CEB	142
F	Scelta del passo della mesh	145
F.1	Lunghezza d'onda e finezza della mesh	146
	Bibliografia	147

ELENCO DELLE FIGURE

1.1	Polarizzazione h_+ e h_\times a confronto	5
1.2	Segnale da sorgente continua di GW	7
1.3	Segnale previsto da sistema binario di buchi neri rotanti	7
1.4	Alcune forme d'onda di segnali gravitazionali da sistemi binari	8
1.5	Fondo gravitazionale	9
1.6	Programma della rete di rivelatori di GW	10
1.7	Geolocalizzazione di alcuni interferometri	11
1.8	Schema ottico di un interferometro per GW	12
1.9	Confronto tra sensibilità di Virgo, LHO e LLO	14
1.10	Principali sorgenti di rumore in AdV	14
1.11	Principali componenti del rumore termico	17
1.12	Superattenuatore di Virgo	20
2.1	Velocità onde-P, -S e di Rayleigh in funzione del coefficiente di Poisson	25
2.2	Peculiarità delle onde sismiche	26
2.3	Velocità delle onde sismiche	27
2.4	Schema di generazione del NN in un rivelatore di GW	29
2.5	Strain in risposta ad una perturbazione gravitazionale di Rayleigh	30
2.6	SNN in funzione della frequenza predetto da Virgo	31
2.7	Struttura del filtro di Wiener	32
3.1	Setup sperimentale della sospensione dello specchio.	42
3.2	Corda 1D massiva	43
3.3	Contributo dei modi alla forza newtoniana	45
3.4	Media pesata e correlazione in 1D	46
4.1	Procedura per l'applicazione di un metodo FEM	52
4.2	Semi-spazio omogeneo infinito	54
4.3	Rapporto di smorzamento in funzione della frequenza	57
4.4	Risposte analitiche ad una sollecitazione a gradino unitario	57
4.5	Simulazioni di risposte ad una sollecitazione a gradino unitario	58
4.6	ANSYS vs. COMSOL: sollecitazione sinusoidale, senza damping	59
4.7	Modelli a FE con smorzamento	59

4.8	Soluzione analitica vs. COMSOL, con damping	60
4.9	Fine tuning: small vs. high damping	61
4.10	Soluzione analitica vs. FEM: discretizzazione	62
4.11	Interfacce grafiche del software ANSYS	63
5.1	Modello di test: parallelepipedo omogeneo	66
5.2	Schema di posizionamento della massa di test	67
5.3	Caratteristiche delle derivate parziali della sollecitazione F^y	67
5.4	Pattern della forza $F^y = k \frac{y}{r^3}$	68
5.5	Alcuni modi normali generati in ANSYS	69
5.6	Mappe di sensitività per la componente F^y	70
5.7	Frequenza e densità dei modi	71
5.8	Coefficienti della forza newtoniana normalizzata	72
6.1	$ \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) $ in soluzione pseudo-t: $a_n = 1, \phi_n(t) = \mathcal{N}(0, \pi/8)$	75
6.2	PSD della soluzione pseudo-t: $a_n = 1, \phi_n(t) = \mathcal{N}(0, \pi/8)$	76
6.3	Mappe da soluzione pseudo-t: $a_n = 1, \phi_n(t) = \mathcal{N}(0, \pi/8)$	77
6.4	$ \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) $ in soluzione pseudo-t: $a_n \propto (dn/df)^{-1/2}, \phi_n(t) = \mathcal{N}(0, \pi/8)$	77
6.5	PSD della soluzione pseudo-t: $a_n \propto (dn/df)^{-1/2}, \phi_n(t) = \mathcal{N}(0, \pi/8)$	78
6.6	Mappe da soluzione pseudo-t: $a_n \propto (dn/df)^{-1/2}, \phi_n(t) = \mathcal{N}(0, \pi/8)$	78
6.7	Confronto tra mappe di correlazione da soluzioni pseudo-temporali: $a_n = 1, \phi_n(t) = \mathcal{N}(0, \pi/8)$ vs. $a_n \propto (dn/df)^{-1/2}, \phi_n(t) = \mathcal{N}(0, \pi/8)$	79
6.8	PSD della soluzione pseudo-t al variare della fase	80
6.9	ROI e SNR	81
6.10	Mappe di correlazione da soluzioni pseudo-t: $A_n(t) = \mathcal{N}(0, \sigma_n)$	82
7.1	Soluzione temporale di ANSYS sul modello di test	86
7.2	Andamento $A_n(t)$ soluzione temporale decomposti sui modi di ANSYS	86
7.3	Matrice contenente i prodotti scalari degli $A_n(t)$ dalla soluzione temporale	87
7.4	PSD della soluzione temporale	88
7.5	$ \Delta $ in funzione del numero cumulato di modi di ANSYS	89
7.6	Matrice dei prodotti scalari $\langle \mathbf{m}_n, \mathbf{m}_m \rangle$	90
7.7	Distribuzione degli elementi off-diagonal di $\langle \mathbf{m}_n, \mathbf{m}_m \rangle$	91
7.8	$ \Delta $ in funzione del numero cumulato di modi ortogonalizzati	91
7.9	Confronto tra mappe con modi di ANSYS e modi ortogonalizzati	92
7.10	Mappe sui modi ortogonalizzati al variare del numero cumulato di modi	93
7.11	Sovrapposizione tra pianta e mappa di sensitività	96
C.1	Residui NN: WF vs. ANN	113
E.1	Pali del NEB	138
E.2	Pianta delle fondazioni del NEB	139
E.3	Pianta “ripulita” delle fondazioni del NEB	140
E.4	Semplificazione geometrica della pianta delle fondazioni del NEB	140
E.5	NEB: schematizzazione delle fondazioni sovrapposta a pianta “ripulita”	141
E.6	Render finale del NEB in ANSYS	141
E.7	Pianta e sezione della palificata di CEB	142
E.8	Pianta e sezione del primo livello di CEB	143

F.1 ANSYS: modello semplificato con mesh non uniforme	145
F.2 ANSYS: modello semplificato con mesh uniforme	146

CAPITOLO 1

INTRODUZIONE

In questo primo capitolo introduttivo, si propone una breve panoramica del contesto fisico sul quale si basa il lavoro di tesi svolto, al fine di inserire meglio il lettore nell'ambito trattato. Per prima cosa verranno definite (e ricavate) le onde gravitazionali (GW) previste dalla teoria della relatività generale di Einstein; successivamente verranno descritte le sorgenti dalle quali questi oggetti possono essere prodotti e gli strumenti (interferometri) che si hanno a disposizione per poterli rivelare. Dopo aver analizzato il funzionamento dei rivelatori di onde gravitazionali, si discuteranno brevemente le principali fonti di rumore limitanti, soffermandosi maggiormente sul rumore newtoniano, principale fondamento della tesi.

1.1 Relatività in “generale” ed equazione delle onde

Poco più di cent'anni fa, nel Novembre del 1915, in quattro lezioni all'Accademia delle Scienze, Einstein presentava la sua teoria della relatività generale. Era il frutto di dieci anni di studi, in cui il celebre scienziato cercava di raccordare la sua teoria della relatività speciale con la teoria della gravitazione universale di Newton. L'equazione alla base della nuova teoria, esprimibile come [1] [2]

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 8\pi GT_{\mu\nu} , \quad (1.1)$$

è chiamata anche equazione di campo di Einstein, e si basa sul principio di equivalenza. La grandezza che permette di calcolare la distanza tra punti in uno spaziotempo curvo e, quindi, esprime le proprietà geometriche dello stesso è il tensore metrico $g_{\mu\nu}$. Questi termini (stiamo parlando di una matrice 4×4), in un sistema di riferimento qualsiasi, possono assumere valori diversi da punto a punto: ed è proprio questa la conseguenza del principio di località su cui si fonda l'equazione della relatività generale. Troviamo inoltre: $R_{\mu\nu}$, matrice che rappresenta la curvatura dello spaziotempo; il tensore energia-impulso $T_{\mu\nu}$, sorgente di interazione gravitazionale (che per Einstein non è soltanto la densità della materia, ma anche la densità ed il flusso dell'impulso e dell'energia della materia stessa, ovvero il suo stato di moto.) In termini più propriamente matematici, quindi, quelle sopra citate sono un sistema di equazioni accoppiate non lineari, la cui soluzione in genere è ricavabile solo per via numerica. La gravitazione di Einstein descrive

fenomeni non previsti dalla teoria di Newton e in particolare apre il nuovo capitolo della *gravitodinamica*. Partendo da questa equazione, il 22 giugno del 1916 lo stesso Einstein presentò all'Accademia prussiana come si trasforma questa equazione nell'ipotesi di una piccola perturbazione di uno spaziotempo, in cui la gravità sia assente. Ricavò così la ben più nota equazione delle onde di D'Alembert, che rappresenta la propagazione della perturbazione: si tratta della prima e completa teorizzazione dell'esistenza di onde gravitazionali (perturbazioni dello spaziotempo).

1.1.1 Linearizzazione delle equazioni di Einstein

Ogni teoria di campo gravitazionale prevede l'esistenza di onde gravitazionali, in quanto un qualsiasi segnale (per essere "trasportato" a partire dalla sorgente) non può propagarsi a velocità superiori alla velocità della luce nel vuoto. La teoria della relatività generale einsteiniana prevede infatti l'esistenza di tali onde e genera limitazioni sulle caratteristiche che possono avere.

L'Eq. (1.1) di campo può essere scritta in modo più elegante facendo uso del tensore di Einstein $G_{\mu\nu}$ [1]:

$$G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R, \quad (1.2)$$

in cui sia il tensore di Ricci $R_{\beta\nu} \equiv R^{\alpha}_{\beta\alpha\nu}$, sia la curvatura scalare $R \equiv g^{\beta\nu}R_{\beta\nu}$ sono ottenuti contraendo il tensore di Riemann, definito come segue:

$$R^{\alpha}_{\beta\mu\nu} \equiv \partial_{\mu}\Gamma^{\alpha}_{\beta\nu} - \partial_{\nu}\Gamma^{\alpha}_{\beta\mu} + \Gamma^{\alpha}_{\mu\gamma}\Gamma^{\gamma}_{\beta\nu} - \Gamma^{\alpha}_{\nu\sigma}\Gamma^{\sigma}_{\beta\mu}, \quad (1.3)$$

dove $\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}$ è il cosiddetto simbolo di Christoffel, descritto da

$$\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}g^{\alpha\sigma}(\partial_{\mu}g_{\nu\sigma} + \partial_{\nu}g_{\sigma\mu} - \partial_{\sigma}g_{\mu\nu}), \quad (1.4)$$

e quindi legato alle derivate prime della metrica $g_{\mu\nu}$. Le onde gravitazionali prodotte da sorgenti astrofisiche saranno – lontano dalle sorgenti – delle deboli perturbazioni dello spaziotempo piatto. Possiamo quindi utilizzare l'approssimazione di campo debole per esprimere le Eq. (1.1) in forma linearizzata. Quando siamo in tale limite, possiamo utilizzare le coordinate "quasi-cartesiane"¹, nelle quali la metrica è descritta da [1] [2]:

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \quad \text{dove } h_{\mu\nu} = h_{\nu\mu} \text{ e } |h_{\mu\nu}| \ll 1 \quad (1.5)$$

dove abbiamo chiamato $h_{\mu\nu}$ la perturbazione alla metrica. Se calcoliamo il tensore di Riemann (e tutti gli altri oggetti che derivano da esso) in questo limite di campo debole, e teniamo conto solo dei termini di primo ordine in h , otteniamo le equazioni di Einstein linearizzate

$$\square^2 H_{\mu\nu} - \partial_{\mu}\partial^{\alpha}H_{\alpha\nu} - \partial_{\nu}\partial^{\alpha}H_{\alpha\mu} + \eta_{\mu\nu}\partial^{\beta}\partial^{\alpha}H_{\alpha\beta} = -16\pi GT_{\mu\nu}, \quad (1.6)$$

(dove si è definito il cosiddetto operatore d'alambertiano $\square^2 \equiv \eta^{\alpha\beta}\partial_{\alpha}\partial_{\beta} \equiv \partial_{\alpha}\partial^{\alpha} = -(\partial^2/\partial t^2) + \nabla^2$), in termini della perturbazione "trace-reversed" definita come:

$$H_{\mu\nu} \equiv h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}h \longrightarrow H \equiv \eta^{\alpha\beta}H_{\alpha\beta} = -h. \quad (1.7)$$

¹Dove per coordinate "quasi-cartesiane" si intendono coordinate che descrivono uno spaziotempo debolmente perturbato rispetto allo spaziotempo piatto di Minkowski.

Avendo a che fare con una teoria covariante abbiamo a disposizione una libertà di gauge, che ci permette di semplificare le nostre espressioni. Sia $H_{\mu\nu}$ una qualsiasi soluzione dell’equazione di Einstein linearizzata in (1.6): a partire da essa, tramite una generica trasformazione nella forma

$$x'^{\alpha} \equiv x^{\alpha} + \xi^{\alpha}, \quad \text{dove } \xi^{\alpha} = \xi^{\alpha}(x^{\lambda}) \text{ e } |\xi^{\alpha}| \ll 1, \quad (1.8)$$

possiamo costruire altre soluzioni $H'_{\mu\nu}$ fisicamente equivalenti. L’opzione più conveniente è quella di scegliere una soluzione tale che

$$\partial^{\mu} H'_{\mu\nu} = 0; \quad (1.9)$$

questa scelta prende il nome di *gauge di Lorenz*. Sotto tale condizione, l’Eq. (1.6) si riduce a [2] [3]:

$$\square^2 H_{\mu\nu} = -16\pi G T_{\mu\nu}. \quad (1.10)$$

L’imposizione della gauge di Lorenz non esaurisce i gradi di libertà non fisici: infatti, a patto che le funzioni $\xi_{\nu}(x^{\alpha})$ siano tali da rispettare

$$\square^2 \xi_{\nu} \equiv \partial_{\alpha} \partial^{\alpha} \xi_{\nu} = 0, \quad (1.11)$$

ogni $H'_{\mu\nu}$ costruita a partire da una soluzione $H_{\mu\nu}$ che risolva l’Eq. (1.10) – quindi nel gauge di Lorenz – è ancora una soluzione fisicamente equivalente che ancora soddisfa il gauge di Lorenz stesso. Se si cercano ora delle soluzioni dell’Eq. (1.10) nel vuoto ($T_{\mu\nu} = 0$), lontano quindi da sorgenti gravitazionali, queste si riducono a:

$$\square^2 H_{\mu\nu} = 0, \quad (1.12)$$

dalla quale ci si aspetta di trovare delle soluzioni di tipo “ondoso” nella forma [2]:

$$H_{\mu\nu}(x^{\alpha}) = e_{\mu\nu} \cos(k_{\alpha} x^{\alpha} + \varphi) = e_{\mu\nu} \cos(-\omega t + \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + \varphi), \quad (1.13)$$

dove $e_{\mu\nu}$ è un tensore costante e k_{α} è un vettore covariante costante di componenti $(-\omega, \mathbf{k}) = (-\omega, k_x, k_y, k_z)$; l’onda descritta è un’onda piana che si propaga in direzione $\hat{\mathbf{k}}$ con velocità di fase $v = \omega/k$.

Queste soluzioni in forma di onda piana sono proprio le *onde gravitazionali* e possono essere viste come increspature alla curvatura dello spaziotempo che portano informazioni relative alle variazioni di un campo gravitazionale, generato da una massa, in zone lontane dalla sorgente stessa attraverso lo spazio vuoto. La soluzione in Eq. (1.13) deve chiaramente soddisfare l’Eq. (1.12) – cioè le equazioni di Einstein nel vuoto nel gauge di Lorenz – nonché l’ovvia richiesta che la perturbazione sia simmetrica. In particolare, dalla condizione $k_{\alpha} k^{\alpha} = 0$ si ricava facilmente che $k = \pm\omega$ da cui $v = \frac{\omega}{k} = \pm 1$: le onde gravitazionali quindi (analogamente a quelle elettromagnetiche) si propagano nel vuoto alla velocità massima permessa dalla teoria della relatività ristretta, cioè la velocità c della luce nel vuoto.

Facciamo ora un breve conto sui gradi di libertà disponibili: scegliendo 4 funzioni $\xi_{\nu}(x^{\alpha})$ opportune, in modo da fissare la libertà di gauge residua in Eq. (1.11) e da porci così nel cosiddetto *transverse-traceless* gauge (indicato con l’apice TT), che può essere riassunto come segue [2]:

$$\begin{cases} \xi_0(x^{\alpha}) & \text{t.c. } H = 0 \\ \xi_i(x^{\alpha}) & \text{t.c. } h_{0i} = 0 \end{cases}, \quad \implies \quad \begin{cases} h^{\text{TT}} = 0 \\ h_{0\mu}^{\text{TT}} = 0 \\ \partial^j h_{ji}^{\text{TT}} = 0 \end{cases}, \quad (1.14)$$

ed avendo imposto la condizione di gauge in Eq. (1.9), rimangono soli 2 gradi di libertà indipendenti. Se si sceglie quindi un sistema di coordinate in cui l'onda viaggia lungo l'asse \hat{z} ($\hat{\mathbf{k}} \equiv \hat{z}$), abbiamo [2]:

$$h_{ij}^{\text{TT}}(x^\alpha) = \begin{pmatrix} h_+ & h_\times & 0 \\ h_\times & -h_+ & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cos(-\omega t + \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + \varphi); \quad (1.15)$$

dove la parte non nulla del tensore di polarizzazione risulta essere:

$$e_{ab} = h_+ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + h_\times \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.16)$$

dove $a, b = 1, 2$ sono gli indici nel piano trasverso (x, y) rispetto alla direzione di propagazione dell'onda.

Si vuole ora analizzare l'effetto dell'onda gravitazionale sulle masse di test in un sistema di riferimento solidale con il laboratorio: per fare questo dobbiamo determinare la separazione fisica tra particelle vicine, facendo uso dell'equazione di deviazione della geodetica la quale, avendo tenuto conto solamente dell'ordine lineare nella perturbazione, si riduce a:

$$\ddot{\xi}^i = \frac{1}{2} \ddot{h}_{ij}^{\text{TT}} \xi^j. \quad (1.17)$$

Consideriamo un set di particelle disposte (prima dell'arrivo dell'onda) su un anello di raggio R giacente sul piano (x, y) ; possiamo quindi usare l'Eq. (1.17) per osservare come la posizione di tale particella cambi al passaggio di un'onda gravitazionale. Per una GW con $\hat{\mathbf{k}} \equiv +\hat{z}$, ad esempio, si nota che una particella posta inizialmente a $z = 0$ subirà uno spostamento confinato solamente al piano (x, y) .

Immaginiamo ora che la sola componente h_+ sia nonnulla ($h_\times = 0$); a $z = 0$ (scegliendo l'origine del tempo in modo che $h_{ij}^{\text{TT}} = 0$ a $t = 0$, ossia fissando la fase arbitraria a $\varphi = \frac{\pi}{2}$), si ha [2] [3]:

$$h_{ab}^{\text{TT}} = h_+ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cos\left(-\omega t + \frac{\pi}{2}\right) = h_+ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \sin(\omega t). \quad (1.18)$$

Inoltre, dal vettore che indica la separazione al variare del tempo

$$\xi_a(t) = (x_0 + \delta x(t), y_0 + \delta y(t)), \quad (1.19)$$

dove (x_0, y_0) sono le posizioni imperturbate, otteniamo le equazioni per gli spostamenti $\delta x(t)$ e $\delta y(t)$ indotti dall'onda gravitazionale [3]:

$$\delta x(t) = \frac{h_+}{2} x_0 \sin(\omega t) = \frac{1}{2} x_0 h_+(t), \quad (1.20)$$

$$\delta y(t) = -\frac{h_+}{2} y_0 \sin(\omega t) = -\frac{1}{2} y_0 h_+(t). \quad (1.21)$$

Ciò avviene, in maniera del tutto analoga, per un'onda polarizzata "diagonalmente" ($h_\times \neq 0$). Possiamo quindi riassumere quanto detto in Fig. 1.1, in cui viene mostrata la variazione spaziale tra il set di particelle disposte ad anello dovuta ad una polarizzazione + (in alto) e una polarizzazione \times (in basso) di una GW uscente dal foglio.

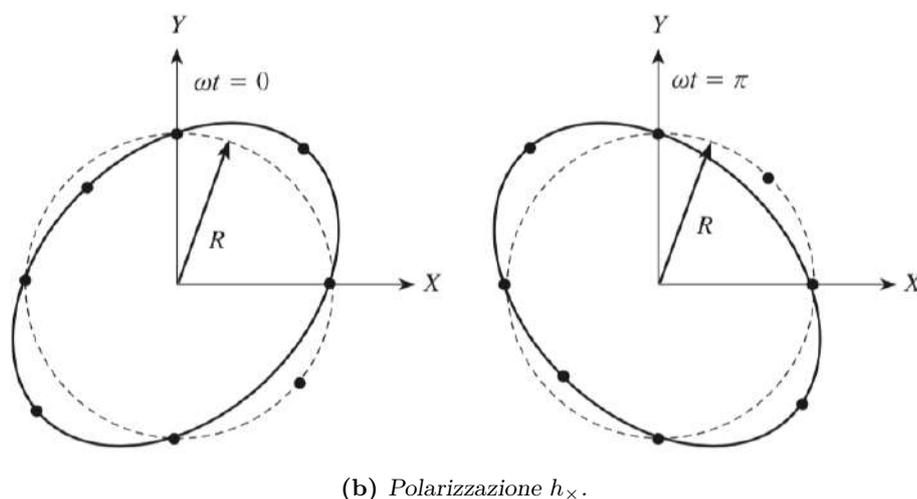
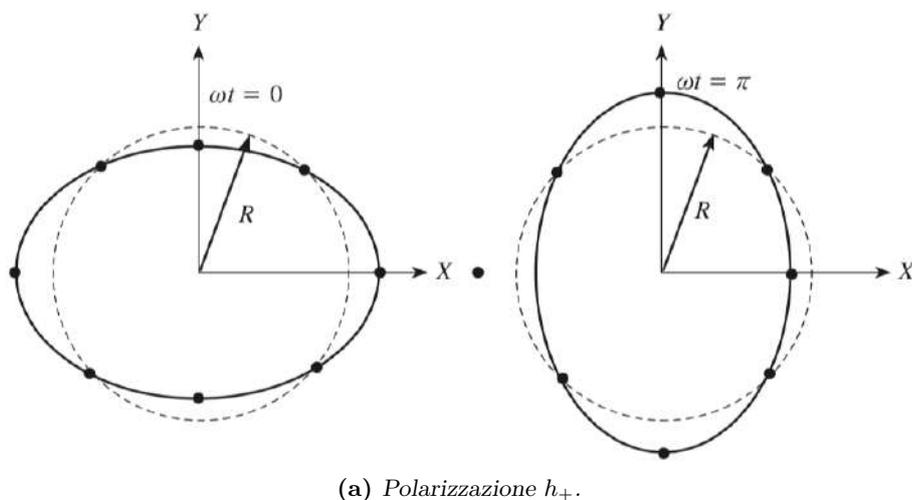


Figura 1.1 – Polarizzazione h_+ e h_x a confronto [2].

Prima di parlare di sorgenti di onde gravitazionali, soffermiamoci a discutere la soluzione delle Eq. (1.10), che può essere ottenuta mediante la funzione di Green in maniera analoga al caso elettromagnetico [4]:

$$H_{\mu\nu}(t, \mathbf{x}) = 4G \int d^3y \frac{T_{\mu\nu}(t_r, \mathbf{y})}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|}, \quad (1.22)$$

avendo definito con la quantità $t_r = t - |\mathbf{x} - \mathbf{y}|$ il “tempo ritardato”. Consideriamo ora il caso in cui la GW sia emessa da una sorgente isolata e molto lontana (assumiamo quindi $|\mathbf{x} - \mathbf{y}| = r \gg R$, con R dimensione della sorgente), e che si muova lentamente (per cui gran parte della radiazione emessa avrà frequenze ω sufficientemente basse $\delta r \ll \omega^{-1}$). Introducendo il momento di quadrupolo $I_{ij}(t)$ possiamo riscrivere l’Eq. (1.22) come:

$$H_{ij}(t, \mathbf{x}) = \frac{2G}{r} \frac{d^2 I_{ij}}{dt^2}(t_r). \quad (1.23)$$

Si deduce chiaramente che la radiazione gravitazionale sia più debole – dipendendo dalla derivata seconda del momento di quadrupolo – rispetto alla radiazione elettromagnetica,

la quale risulta proporzionale alla derivata prima del momento di dipolo, in genere più intenso. Ed è proprio a causa dell'annullamento del fattore di quadrupolo che i sistemi a simmetria sferica non possono irradiare. Ne consegue quindi, che le sorgenti di onde gravitazionali devono rompere tale simmetria.

Inoltre, un problema di cui prendere atto è la ridotta ampiezza del segnale gravitazionale che giunge sulla Terra, risultato delle grandi distanze alle quali avvengono tali eventi, unito al fatto che la gravità sia più debole rispetto alle forze elettromagnetiche. Abbiamo bisogno quindi di condizioni estremamente energetiche per poter osservare questi fenomeni. Infatti, disponendo di detector interferometrici con bracci lunghi ~ 3 km, se definiamo lo strain ($\Delta L/L$) come variazione di lunghezza relativa di tali bracci dovuta al passaggio di una GW, possiamo aspettarci dei valori di $\Delta L/L \sim 10^{-21}$, con una conseguente variazione di lunghezza $\Delta L \sim 10^{-18}$ m.

1.2 Sorgenti gravitazionali

Prima di discutere su come si possano rivelare le onde gravitazionali, dovremmo pensare a quali siano le sorgenti più facilmente osservabili. La prima importante considerazione da fare è sulle condizioni necessarie per la generazione di un evento gravitazionale, sostanzialmente diverse da quelle per la radiazione elettromagnetica. La differenza può essere ricondotta al fatto che le GW siano prodotte dal moto di grandi masse, mentre le onde elettromagnetiche (tipicamente) da eccitazioni incoerenti di singole particelle. La radiazione elettromagnetica può quindi essere prodotta da una sorgente statica, come una stella, il che rappresenta un grande vantaggio, mentre le onde gravitazionali necessitano di un sistema di masse accelerate, purché esso non sia a simmetria sferica. Di solito queste fonti vengono classificate in base al segnale da esse generato nel tempo.

1.2.1 Sorgenti periodiche

Sono sorgenti che emettono onde gravitazionali continue (CW), dotate quindi frequenza abbastanza costante e ben definita. Possono esserne un esempio i sistemi binari di stelle o buchi neri che orbitano l'uno intorno all'altro (molto prima della fase di fusione), o una singola stella di neutroni che ruota rapidamente intorno al proprio asse. Ci si aspetta che queste sorgenti producano GW di intensità (purtroppo) estremamente debole, poiché si evolvono per periodi di tempo più lunghi e sono di solito meno catastrofiche delle sorgenti che generano onde "inspiral" o "burst".

Consideriamo ad esempio singole stelle di neutroni rotanti: la particolarità di questi oggetti è l'essere asimmetrici rispetto all'asse di rotazione. Esse hanno una forma allungata verso la direzione della sorgente gravitazionale, e questo consente loro di emettere CW ad una frequenza doppia di quella di rotazione. Come si può vedere dalla Fig. 1.2, questo tipo di segnale appare quasi perfettamente costante (sia in frequenza che in ampiezza) per periodi brevi. Su scale temporali più lunghe, invece, la frequenza tenderà a diminuire sia perché l'emissione di GW riduce la velocità di rotazione della sorgente stessa, sia a causa della rotazione della Terra, che produce una modifica della frequenza dell'onda rivelata dal detector.

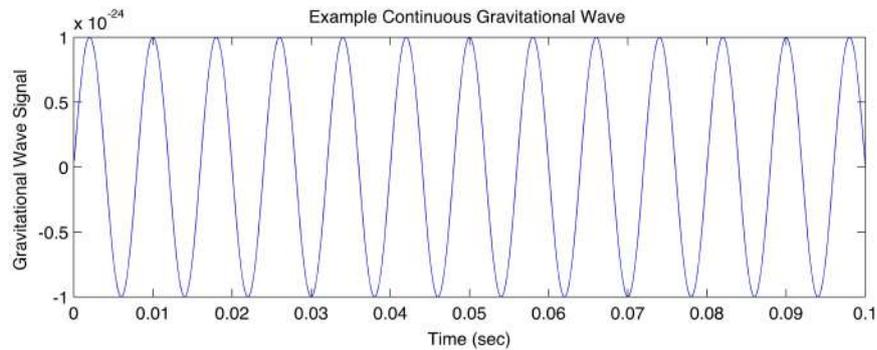


Figura 1.2 – Forma del segnale prevista da una sorgente continua di GW.

1.2.2 Sorgenti quasi-periodiche: binarie coalescenti

Le onde gravitazionali prodotte da questo tipo di sorgenti sono dette “inspiral”, poiché sono generate durante la fase finale della vita di sistemi binari, ovvero coppie di oggetti che orbitano intorno ad un comune centro di massa. Questi sistemi sono di solito coppie di buchi neri o di stelle di neutroni, o ancora, coppie formate da un buco nero e da una stella di neutroni che, avendo perso energia in modo lento e costante, tendono ad orbitare sempre più vicini tra loro, fino ad arrivare alla collisione. Mentre le due masse ruotano l’una intorno all’altra, le loro distanze orbitali diminuiscono e la loro velocità aumenta: infatti, il suono che le GW emesse produrrebbero è un “cinguettio”, segno del fatto che la loro frequenza aumenta sino alla fase di coalescenza. Ed è proprio in questo momento che avviene la più massiccia emissione di onde: tanto è vero che queste sorgenti sono alcune tra le più promettenti.

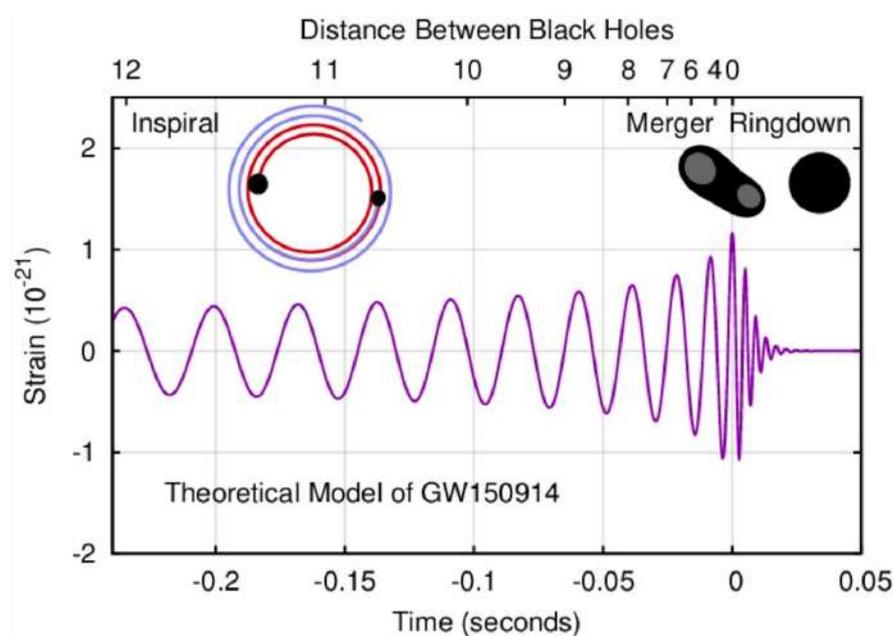


Figura 1.3 – Forma del segnale prevista da un sistema binario di buchi neri rotanti: dalla fase di spiraleggiamento, il sistema si restringe emettendo GW, fino ad arrivare alla fase di fusione, in cui si ha un potente picco del segnale.

In Fig. 1.3 si può osservare una tipica forma d'onda che ci si aspetta da un sistema binario di buchi neri rotanti. Vediamo insieme raffigurate le tre fasi che rappresentano il loro ciclo evolutivo, che possono essere riassunte brevemente come segue.

- i) **Spiraleggiamento (“inspiral”)**: questa prima fase consiste essenzialmente in una graduale contrazione dell'orbita del sistema binario. È la fase più lunga – può durare anche centinaia di milioni di anni! – poiché le GW emesse sono molto deboli, per cui il raggio dell'orbita del sistema è ancora molto elevato.
- ii) **Fusione**: i due oggetti ora sono molto vicini e orbitano tra loro a grande velocità (attorno a $0.3c$) producendo fortissimi campi gravitazionali; nell'istante prima che i due oggetti collassino, si ha la massima emissione di radiazione gravitazionale.
- iii) **Ringdown**: nell'istante successivo alla fusione avviene la formazione di un nuovo buco nero (con caratteristiche uniche, dipendenti dalla massa e dallo spin dei genitori originari) con forma, inizialmente, non perfettamente sferica, dovuta alla residua emissione di GW che si conclude, però, rapidamente.

Infine, in Fig. 1.4 vengono raffigurati tre tipi di segnali gravitazionali emessi da diversi sistemi binari.

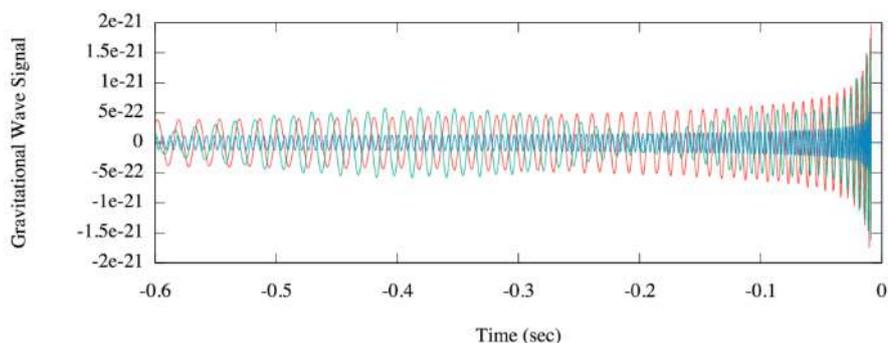


Figura 1.4 – Forma d'onda di tre segnali gravitazionali provenienti da diversi sistemi binari: il segnale rosso è proprio di un sistema di due buchi neri sprovvisti di spin, aventi massa rispettivamente $10M_{\odot}$ e $5M_{\odot}$; il verde è per buchi neri aventi le medesime masse, ma con ciascuno dei due oggetti dotato di spin. Infine, il segnale blu proviene da due stelle di neutroni aventi massa pari a $1.4M_{\odot}$, anche in questo caso prive di spin.

1.2.3 Sorgenti impulsive

In questa categoria possiamo collocare le più potenti esplosioni cosmiche, vale a dire supernove e Gamma Ray Burst. Purtroppo, oltre ad essere i più energetici, questi episodi sono anche i più improvvisi, dai quali risulta pressoché impossibile fare un modello predittivo per la loro forma d'onda. D'altra parte, da questi eventi catastrofici ci si può aspettare di trovare anche fenomeni ad ora sconosciuti, che potrebbero essere fondamentali per studiare l'Universo più lontano, dove le condizioni fisiche sono tra le più estreme.

1.2.4 Fondo stocastico

Nel 1965 Penzias e Wilson scoprirono che l'Universo è permeato da una radiazione elettromagnetica denominata “fondo cosmico a microonde” (CMB), risalente all'incirca 300 000 anni dopo il Big Bang. Questa scoperta ne fornì la prima evidenza sperimentale, diventando così una delle più importanti nella storia della cosmologia. Proprio come per il CMB, c'è ragione di credere che vi sia un analogo background gravitazionale prodotto nei primissimi istanti di vita del Cosmo, all'incirca intorno ai $(10^{-36} \div 10^{-32})$ s dal Big Bang. Si pensa che questo segnale sia il risultato di una sovrapposizione di un grande numero di eventi astronomici casuali e indipendenti, e che abbia i requisiti di stazionarietà e isotropia oltre ad essere caratterizzato in frequenza. Se questo “fondo” ha veramente avuto origine dal Big Bang, allora potrebbe racchiudere informazioni preziose sulla primissima evoluzione dell'Universo. Come si può notare dalla Fig. 1.5, la forma d'onda di questo segnale assomiglia molto ad un tipico rumore strumentale, ed è quindi difficile da riconoscere. L'unico modo per distinguerlo, è quello di poter disporre di più rivelatori: supponendo che questo background stocastico sia presente in tutti gli interferometri che rivelano la misura (e che il loro rumore intrinseco, invece, sia scorrelato, quindi del tutto indipendente l'uno dall'altro), si può estrarre il segnale in questione individuando le correlazioni tra i vari strumenti. Inoltre, come sarà più

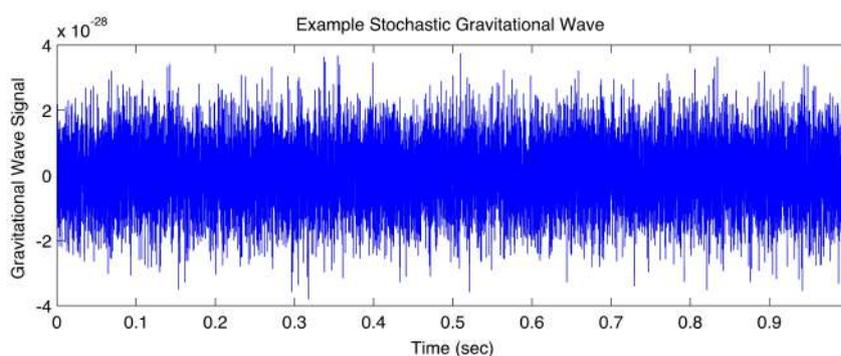


Figura 1.5 – Riproduzione del segnale di fondo gravitazionale.

chiaro in seguito, avendo a disposizione più rivelatori e conoscendone la disposizione spaziale (Fig. 1.7) si riesce ad individuare, in buona approssimazione, la direzione di provenienza dell'onda gravitazionale.

1.3 Rivelatori interferometrici

Successivamente alla elaborazione dell'equazione delle onde di Einstein, intorno agli anni '50 del secolo scorso, vi fu un grande dibattito sulla rivelabilità di queste onde. La maggiore difficoltà consisteva nel riuscire a misurare la deformazione di un corpo provocata dal passaggio di un'onda gravitazionale, stimata all'incirca 10^{-21} m per metro. Per riuscire a misurare variazioni così piccole, inizialmente gli scienziati pensarono di poter rivelare le onde più energetiche, ovvero quelle generate da eventi catastrofici, quali supernove o burst. Il pioniere dei rivelatori di onde gravitazionali fu Weber che, intorno agli anni '60, mise a punto la prima antenna (o barra) risonante. Si tratta di un cilindro di alluminio massivo, progettato per vibrare ad una data frequenza di risonanza (indotta dal passaggio dell'onda) di cui viene monitorata la lunghezza e, tramite una

catena di amplificatori elettromeccanici, tale oscillazione viene convertita in un segnale elettrico. Data la scarsa sensibilità di questi strumenti, non si ottennero i risultati desiderati. La conferma (seppur indiretta) della presenza delle onde gravitazionali si ebbe solo nel 1974 dalla osservazione di una pulsar binaria (PSR 1913 + 16) da parte Hulse e Taylor (premio Nobel per la fisica 1993). Successivamente, al fine di poter avere una misurazione diretta delle GW, si cercò di migliorare la sensibilità delle antenne stesse, tenendole a temperatura più bassa possibile per eliminare, ad esempio, i disturbi che potevano derivare dall'agitazione termica del materiale stesso con cui erano prodotte. Ma solo con l'avvento dell'interferometria laser su larga scala si riuscì, il 14 Settembre 2015, ad ottenere la prima misurazione diretta delle onde gravitazionali, provenienti dalla coalescenza di due sistemi binari di buchi neri [5]: le osservazioni sono state effettuate dalla collaborazione LIGO-Virgo [6].

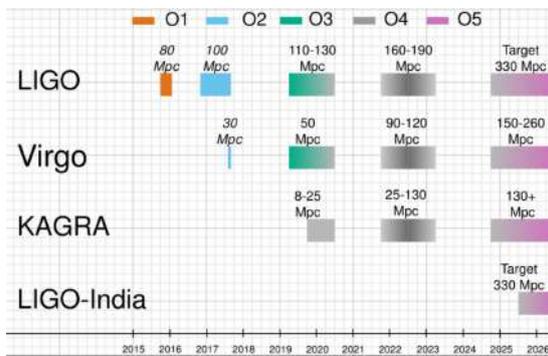


Figura 1.6 – Tabella riassuntiva del programma della rete globale di rivelatori di onde gravitazionali dei periodi osservativi (presenti e futuri). Le barre colorate mostrano i run osservativi, con le sensibilità previste per i run futuri e quelle ottenute per i run O1, O2 e O3.

Virgo, che al momento della detection era spento poiché in fase di potenziamento, è un grande interferometro laser progettato e costruito da una collaborazione tra il CNRS francese e l'INFN italiano, situato presso Cascina, sul sito dell'Osservatorio Gravitazionale Europeo (EGO). Ha inizialmente osservato il cielo dal 2007 al 2011, senza nessuna registrazione di eventi rilevanti e nei successivi cinque anni, fino al 2016, è stato spento e sottoposto ad una fase di avanzamento, mirata ad aumentarne la sensibilità di un ordine di grandezza su tutta la banda di frequenze ($10 \div 10\,000$) Hz, incrementando così di un fattore 1000 il volume di Universo osservabile. Nel Febbraio 2017 avviene l'inaugurazione di Advanced Virgo (AdV), che si è unito alla rete dei due interferometri americani Advanced LIGO (uno situato a Livingstn e uno a Handford) nella seconda campagna osservativa denominata O2, nell'Agosto dello stesso anno. Ad Aprile 2019, è iniziato il terzo periodo osservativo (O3) che si è concluso ad Aprile di quest'anno. La Fig. 1.6 riassume il programma della rete globale di rivelatori di onde gravitazionali dei vari periodi osservativi [7] (per quanto riguarda Advanced Virgo, si è riusciti ad arrivare ad un range di sensibilità di 60 Mpc²).

Oltre a LIGO e Virgo (di cui descriverò brevemente il funzionamento nella sezione seguente) vi sono altri interferometri, quali GEO600 in Germania, CLIO (Cryogenic Laser Interferometer Observatory) e KAGRA (Kamioka Gravitational wave detector, Large-scale Cryogenic Gravitational wave Telescope) in Giappone, ACIGA (Australian Consortium for Interferometric Gravitational Wave Astronomy) in Australia e LISA (Laser Interferometer Space Antenna), attualmente in fase di progetto, che rivelerà

²La sensibilità di un rivelatore di onde gravitazionali è spesso data in termini della distanza alla quale la fusione di un sistema binario di stelle di neutroni è rilevata con un rapporto segnale-rumore di 8 da un filtro adattato; la distanza è mediata su tutte le possibili direzioni di provenienza nel cielo e orientazioni di un sistema binario – si assume che ciascuna stella di neutroni nel sistema binario abbia massa pari a 1.4 volte quella del Sole –. Tale distanza si indica con il termine “BNS range” (Binary Neutron Star) che viene dato in unità di Mpc (1 pc = 3.26 ly)

le onde gravitazionali direttamente dallo spazio, e quindi non sarà soggetto ai rumori da cui dipendono gli attuali interferometri a Terra (si veda la Sez. 1.3.2 per maggiori dettagli). Possiamo vederne una rappresentazione globale in Fig. 1.7.

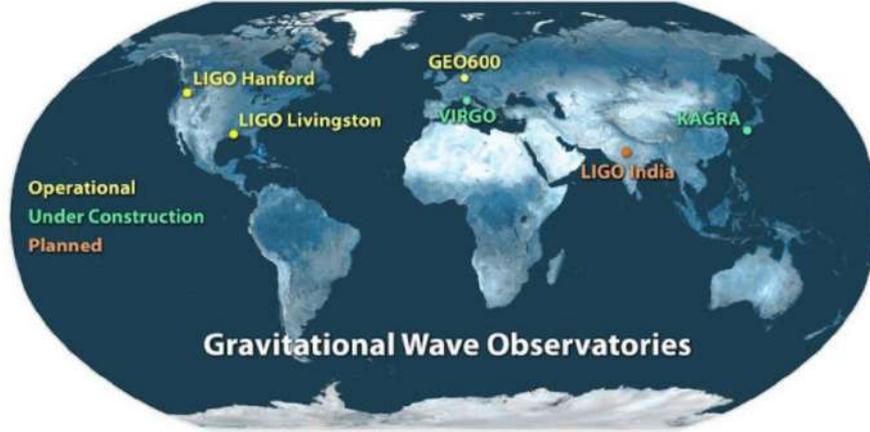


Figura 1.7 – Geolocalizzazione di alcuni rivelatori interferometrici (presenti e futuri).

1.3.1 Funzionamento

Nella Sez. 1.1, abbiamo già discusso su come le onde gravitazionali deformino lo spaziotempo e producano forze in maniera tale che la distanza tra due masse altrimenti libere, aumenti e diminuisca alternativamente al passaggio dell'onda. Una caratteristica importante è che ad un allontanamento in una direzione corrisponde un avvicinamento nella direzione perpendicolare. L'ampiezza delle onde gravitazionali, che possiamo denotare con il parametro adimensionale h (dell'ordine $h \sim 10^{-18}$), è la misura della variazione relativa delle distanze tra due masse libere, che può essere valutata sfruttando il fenomeno dell'interferenza. Il genere di interferometro che viene usato si basa sui principi dell'interferometro Michelson a laser [8], molto sensibile a differenze di lunghezza dei suoi bracci e quindi ideale per misurare segnali di questo tipo. Uno specchio semi-riflettente, detto *beamsplitter*, divide il fascio laser incidente in due componenti uguali, che vengono mandate nei due bracci ortogonali dell'interferometro (per Virgo, la lunghezza dei bracci è $L = 3$ km), per poi essere nuovamente riflesse da due ulteriori specchi semi-riflettenti (*masse di test*) al beamsplitter, dove vengono ricombinati in opposizione di fase e indirizzati verso un fotodiodo in modo che, normalmente, non arrivi luce sul rivelatore. La variazione del cammino ottico provocata dall'onda, produce un piccolo sfasamento tra i fasci e di conseguenza altera l'intensità luminosa osservata e quindi la potenza registrata. In particolare, se chiamiamo $E(t, x)$ il campo prodotto dal laser, l'intensità risultante sul fotodiodo sarà pari a:

$$|E|^2 = E_0^2 \sin^2(k_L[L_y - L_x]), \quad (1.24)$$

dove si è indicato con L_x e L_y la lunghezza dei bracci dell'interferometro, e k_L il suo vettore d'onda. Il termine

$$k_L[L_y - L_x] \simeq \frac{2\pi L}{\lambda} \frac{\Delta L}{L} \quad (1.25)$$

rappresenta proprio la differenza di fase indotta dall'onda gravitazionale – valida sotto l'approssimazione $\lambda_{\text{GW}} \gg L$ – in cui il termine $\Delta L/L$ è lo *strain*, ovvero la variazione

relativa di lunghezza dei due bracci, mentre $2\pi L/\lambda$ rappresenta il fattore di scala dell'interferometro.

Tuttavia, vista l'altissima sensibilità richiesta (ci si aspetta che le onde gravitazionali provochino nei bracci una variazione ΔL dell'ordine $\Delta L \sim 10^{-18}$ m), bisogna necessariamente apportare delle modifiche allo strumento, altrimenti non sarebbe possibile osservare alcun tipo di segnale. Infatti, denominata λ la lunghezza d'onda del laser ($\lambda \approx 1064$ nm), ed essendo $\Delta L \ll \lambda$, la potenza del segnale sul fotodiodo sarebbe troppo debole per renderlo chiaramente distinguibile. Vengono quindi introdotte negli interferometri delle cavità risonanti ottiche (dette *cavità di Fabry-Perot*) che, tramite riflessioni multiple della luce, aumentano artificialmente la lunghezza ottica dei bracci da 3 a circa 100 km e, pertanto, amplificano la piccola variazione di distanza causata dal passaggio della GW. Possiamo vedere uno schema ottico semplificato dell'interferometro per onde gravitazionali in Fig. 1.8.

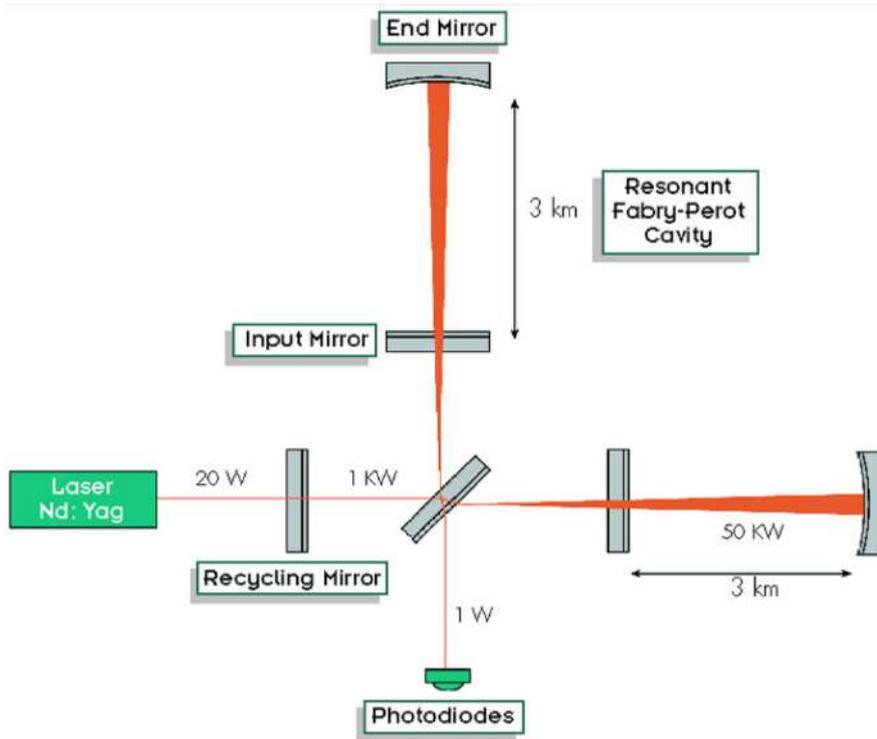


Figura 1.8 – Schema ottico semplificato di un interferometro di onde gravitazionali. Rispetto all'interferometro di Michelson vengono introdotte in ogni braccio le cavità di Fabry-Perot: esse sono composte da uno specchio parzialmente trasmittente e da un altro altamente riflettente. La cavità permette alla luce di rimbalzare più volte, aumentando così la potenza e la differenza di fase prodotta dall'onda gravitazionale.

Nonostante l'introduzione delle cavità ottiche sopra descritte, gran parte della luce tornerebbe indietro verso il laser. Viene quindi aggiunto nell'interferometro uno specchio di ricircolo (*recycling mirror*) nel quale si rimanda la luce in fase con il fascio incidente, aumentando così la potenza luminosa disponibile e consentendo un miglioramento della sensibilità di misura. Se l'ottica fosse perfetta e gli specchi totalmente in quiete, la luce non raggiungerebbe il rivelatore se non al passaggio di un'onda gravitazionale. Sfortunatamente, trattandosi di uno strumento molto sensibile, è anche soggetto a tutta

una serie di rumori (vedremo i principali nella sezione successiva) che assicurano che ciò non avvenga.

1.3.2 Sorgenti di rumore limitanti

Vi sono numerosi fenomeni che impattano negativamente sulla sensibilità dei rivelatori interferometrici appena descritti, e rendono la misura dell'ampiezza di un'onda gravitazionale un'impresa tutt'altro che semplice. Questi segnali spuri prendono il nome di *rumori*, e vengono indicati tipicamente con $n(t)$. In genere, sono processi stocastici (ovvero non riproducibili), hanno poche proprietà globali e si assume che siano non correlati con il segnale $x(t)$ che cerchiamo di misurare. Possiamo dividere i rumori in due grandi categorie, a seconda della loro origine. Distinguiamo quindi:

- i) rumori fondamentali;
- ii) rumori tecnici.

I rumori fondamentali provengono da quelle sorgenti, per così dire, “ineliminabili”, e sono quelli che limitano maggiormente la sensibilità dell'interferometro e che richiedono, quindi, uno sforzo maggiore per essere ridotti, come può essere la riprogettazione di una struttura piuttosto che lo sviluppo di tecnologie alternative. Un esempio di rumori di questo tipo sono il rumore sismico e newtoniano, il rumore quantistico, e il rumore termico. I rumori tecnici, invece, sono almeno un fattore 10 al di sotto dei rumori fondamentali, e possono limitare la sensibilità dello strumento fino a quando esso non raggiunge la condizione ottimale di funzionamento. Problemi di luce diffusa, pressione di gas residuo nei sistemi a vuoto, rumore di frequenza e intensità del laser e rumori di controllo sono esempi di rumori tecnici.

L'effetto di una generica sorgente di rumore può essere descritto in termini di due quantità: la densità spettrale di rumore $S_N(f)$ o *Power Spectral Density* (PSD), che rappresenta la potenza media del segnale ad ogni frequenza f , e il *rapporto segnale-rumore* SNR (o S/N) definito su un tempo di misura τ che è, per un oggetto monocromatico, il parametro più utilizzato per misurare la qualità della trasmissione dell'informazione. Per un'onda gravitazionale periodica, con orientamento ottimale, tra queste due quantità vale la seguente relazione:

$$\text{SNR} = \frac{S}{N} = x_0 \sqrt{\frac{\tau}{S_N(f)}} \quad \Longrightarrow \quad S_N(f) = \tau \left(\frac{x_0}{\text{SNR}} \right)^2, \quad (1.26)$$

in cui x_0 rappresenta l'ampiezza della funzione periodica oscillante monocromatica e τ il tempo di osservazione. La densità spettrale di potenza, come vedremo nei paragrafi successivi, ha un andamento diverso a seconda della sorgente di rumore a cui ci si riferisce. Consideriamo ora la Fig. 1.10 in cui sono mostrati i contributi previsti dalle principali sorgenti di rumore che influenzano la sensibilità di Advanced Virgo, in base alla regione di banda in cui sono dominanti. La loro intensità è espressa in ordinata da $\sqrt{S_N(f)}$, che dipende dalle caratteristiche costruttive dei vari rivelatori (Fig. 1.9). La somma di tutti i rumori presenti nell'interferometro è dato dalla curva nera, che esprime quindi la sensibilità (in funzione della frequenza), minima ($S/N = 1$), alla quale possiamo osservare gli eventi gravitazionali: tutto ciò che rimane al di sopra di tale curva ($S/N > 1$) può essere “visto” dallo strumento; ciò che è al di sotto, invece, è dominato dal rumore ($S/N < 1$). In questa sezione, tratterò solamente alcuni tipi dei

rumori citati in precedenza, ed in modo molto superficiale. Dedicherò invece l'intero capitolo successivo al rumore Newtoniano, fondamento di questa tesi (per maggiori dettagli, si veda la referenza [9]).

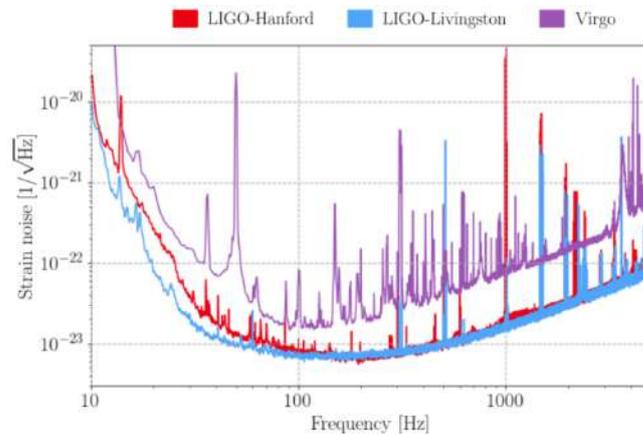


Figura 1.9 – Confronto tra le curve di sensibilità raggiunte durante il periodo osservativo O2 dai tre interferometri Virgo, LHO e LLO. Viene riportata la radice della densità spettrale di potenza in funzione della frequenza per ciascuna curva.

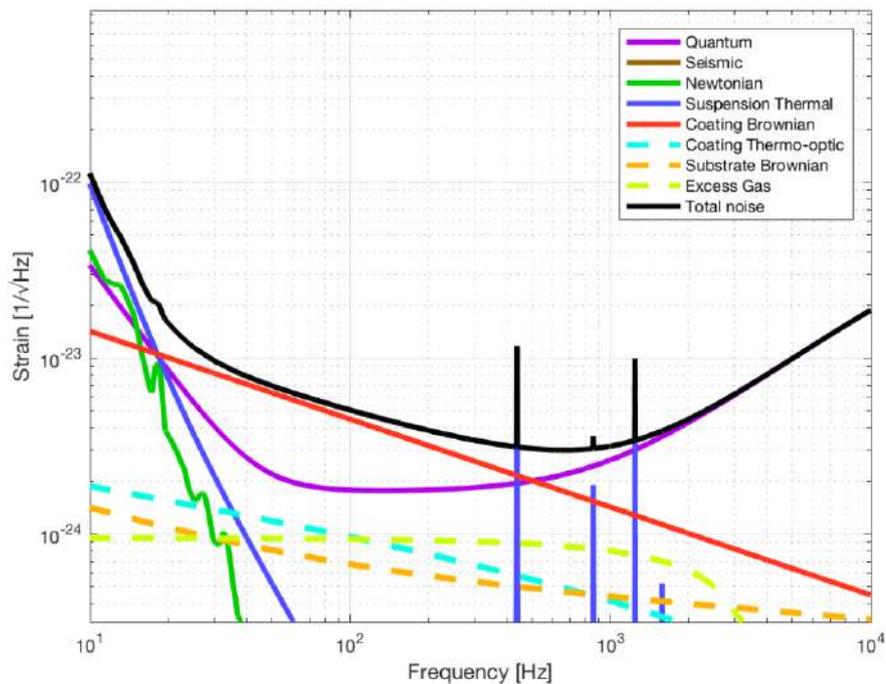


Figura 1.10 – Principali sorgenti di rumore che influenzano la sensibilità di AdV, raffigurata dalla curva nera, la quale rappresenta la somma totale dei contributi di rumore nell'interferometro: viene riportata in ordinata l'intensità di ciascun rumore (strain) in funzione della frequenza.

Rumore quantistico

Il *rumore quantistico* è legato alle fluttuazioni della distribuzione dei fotoni nel campo elettromagnetico. Esso influisce sulla sensibilità dell'interferometro in una banda molto vasta di frequenze – (10 ÷ 10 000) Hz – ed è costituito da due comportamenti complementari: il *rumore shot*, dominante ad alte frequenze, e il *rumore di pressione di radiazione*, che contribuisce al di sotto dei 100 Hz.

Il *rumore shot* è un problema a cui si va incontro ogni volta che si effettua una misura che presuppone l'oscillazione di un campo elettromagnetico: in particolare, è legato all'oscillazione di fase del campo ottico che perturba il rivelatore ad alte frequenze. In base al numero medio di fotoni N_γ che viene rivelato nell'intervallo di tempo di osservazione T , la potenza media misurata sul fotorivelatore vale:

$$P = \frac{N_\gamma \hbar \omega}{T}, \quad (1.27)$$

dove $\hbar \omega$ è l'energia del fotone con frequenza $f = \omega/(2\pi)$. In assenza di correlazioni, i fotoni ricevuti obbediscono alla statistica di Poisson (stato coerente della luce), e quindi ci aspettiamo di trovare una varianza $\Delta N_\gamma = \sqrt{N_\gamma}$. Le fluttuazioni corrispondenti nella potenza ottica sono pari a:

$$\Delta P = \frac{\sqrt{N_\gamma} \hbar \omega}{T} = \sqrt{\frac{\hbar \omega P}{T}}. \quad (1.28)$$

Si tratta di un limite fondamentale dovuto alla natura corpuscolare della luce. In assenza di GW, la potenza in uscita dal rivelatore sarà $P = P_0 \sin^2(\phi_0)$, quindi:

$$(\Delta P)_{\text{shot}} = |\sin(\phi_0)| \sqrt{\frac{\hbar \omega P_0}{T}}; \quad (1.29)$$

mentre la potenza in uscita dovuta al passaggio di un'onda gravitazionale risulta essere $P = P_0 \sin^2[\phi_0 + \Delta\phi(t)]$, dove con $\Delta\phi(t)$ si intende la variazione di fase indotta dalla stessa GW. Quindi si ha:

$$(\Delta P)_{\text{GW}} \simeq 2P_0 \sin(\phi_0) \cos(\phi_0) \Delta\phi(t), \quad (1.30)$$

e infine

$$\text{SNR} = \frac{(\Delta P)_{\text{GW}}}{(\Delta P)_{\text{shot}}} = 2 \sqrt{\frac{P_0 T}{\hbar \omega}} \Delta\phi(t) |\cos(\phi_0)|. \quad (1.31)$$

Dall'Eq. (1.26) risulta quindi:

$$S_{\text{shot}} \propto \frac{1}{P}, \quad (1.32)$$

ovvero che ad un aumento della potenza ottica circolante nella cavità si riducono gli effetti legati al rumore shot. Tuttavia, in questo modo si aumenta la pressione sullo specchio stesso dovuta alla riflessione del fascio di fotoni incidenti, a cui corrisponde una quantità di moto pari a $2\mathbf{p}$. Se si ha una fluttuazione del numero di fotoni avremo di conseguenza una fluttuazione della pressione di radiazione: essendo $|\mathbf{p}|c$ l'energia del fotone, la forza esercitata da un fascio di potenza P sullo specchio è $F = 2P/c$ e la sua varianza vale $\Delta F = 2\Delta P/c$:

$$\Delta F = 2 \sqrt{\frac{\hbar \omega P}{c^2 T}}. \quad (1.33)$$

Questa forza stocastica agisce su uno specchio che nel piano orizzontale è libero di muoversi, grazie ad un particolare sistema di sospensioni (Fig. 1.12). Di conseguenza avremo uno spostamento Δx della massa di test (M), a cui corrisponde una variazione di lunghezza del ramo $\Delta L = 2|\Delta x|$. Per l'interferometro completo occorre quindi sommare i due contributi, ottenendo infine:

$$(\Delta L)_{\text{rad}} = \frac{4}{M(2\pi f)^2} \sqrt{\frac{\hbar\omega P}{c^2 T}}. \quad (1.34)$$

Sapendo che, per un semplice interferometro di Michelson, l'effetto di una GW sulla lunghezza del ramo è $(\Delta L)_{\text{GW}} = x_0 L$, avremo:

$$\text{SNR} = \frac{x_0 L}{4} M(2\pi f)^2 \sqrt{\frac{c^2 T}{\hbar\omega P}}. \quad (1.35)$$

Possiamo quindi ricavare la PSD sempre facendo uso dell'Eq. (1.26):

$$S_{\text{rad}} \propto P. \quad (1.36)$$

Risulta quindi chiaro che un aumento di potenza P del fascio da un lato migliora il rumore shot, ma dall'altro peggiora quello di pressione di radiazione. La PSD totale si ricava dalla somma scorrelata dei due rumori citati, Eq. (1.32) e Eq. (1.36):

$$S_{\text{Q}}(f) = S_{\text{rad}}(f) + S_{\text{shot}}(f). \quad (1.37)$$

Vi è un particolare valore di frequenza f^* per il quale i due rumori si eguagliano: esso corrisponde al valore ottimale (minimo) della densità spettrale di potenza, e viene detto *limite quantistico standard*:

$$\sqrt{S_{\text{Q}}(f^*)} = \frac{1}{2\pi f^* L} \sqrt{\frac{8\hbar}{M}}. \quad (1.38)$$

Per minimizzare il rumore quantistico, in definitiva, è necessario aumentare la lunghezza dei bracci dell'interferometro e appesantire le masse di test.

Rumore termico

In un sistema all'equilibrio termodinamico con temperatura T , il teorema di equipartizione dell'energia assegna a ciascun grado di libertà un'energia media pari a $k_{\text{B}}T/2$ con k_{B} costante di Boltzmann. A causa delle interazioni tra gli elementi microscopici tale energia è soggetta a fluttuazioni temporali; l'effetto di queste fluttuazioni si traduce in oscillazioni casuali delle osservabili macroscopiche del sistema. Il meccanismo appena descritto è noto come *rumore termico*. Questo rumore limita la sensibilità del rivelatore nella banda compresa tra i 10 Hz e i 300 Hz, e rappresenta il rumore di posizione delle masse di test dovuto all'agitazione termica sia degli specchi sia del sistema di sospensione. I suoi effetti possono essere calcolati usando il teorema di fluttuazione-dissipazione, che lega la densità spettrale di potenza $S_N(\omega)$ alle caratteristiche dissipative del sistema:

$$S_N(\omega) = -2\hbar \coth\left(\frac{\hbar\omega}{2k_{\text{B}}T}\right) \Im[\alpha(\omega)], \quad (1.39)$$

dove $\alpha(\omega)$ rappresenta la risposta del sistema ad un impulso. Infatti, facendo uso dell'Eq. (1.39), si può arrivare a calcolare lo spettro del rumore termico, dato dall'equazione:

$$S_{\text{th}}(f) = \frac{2K_B T \Phi_{\text{mirr}}}{\pi f F_0^2} \frac{1 - \nu^2}{\sqrt{\pi E r_0}}, \quad (1.40)$$

in cui ν ed E sono rispettivamente il coefficiente di Poisson ed il modulo di Young del materiale di cui è fatto lo specchio, r_0 è il raggio del fascio incidente³, Φ_{mirr} l'angolo di perdita, F_0 la forza agente sullo specchio e T la sua temperatura. Questo rumore, come si vede dall'Eq. (1.40), è fortemente legato alla temperatura alla quale si trova l'oggetto e al coefficiente di frizione, ovvero alla dissipazione presente nel sistema, che dipende dalle proprietà del materiale. Per ridurre il rumore termico quindi si può agire essenzialmente in due modi:

- (i) portando il sistema a temperature criogeniche;
- (ii) scegliendo un sistema con dissipazione molto bassa.

La prima scelta è stata adottata dai rivelatori di I e II generazione, mentre la seconda si sta attuando per gli interferometri di III generazione (senza ovviamente escludere la prima opzione). Il rumore termico delle sospensioni comprende fluttuazioni del pendolo, fluttuazioni verticali e modi di violino; mentre il rumore termico dovuto alle masse di test include il moto browniano del substrato e del coating dello specchio e fluttuazioni termo-rifrattive e termo-elastiche. Il termine dominante, come mostra la Fig. 1.11 è il rumore del coating, che dipende dall'intensità della luce incidente e determina la posizione a cui avviene la riflessione.

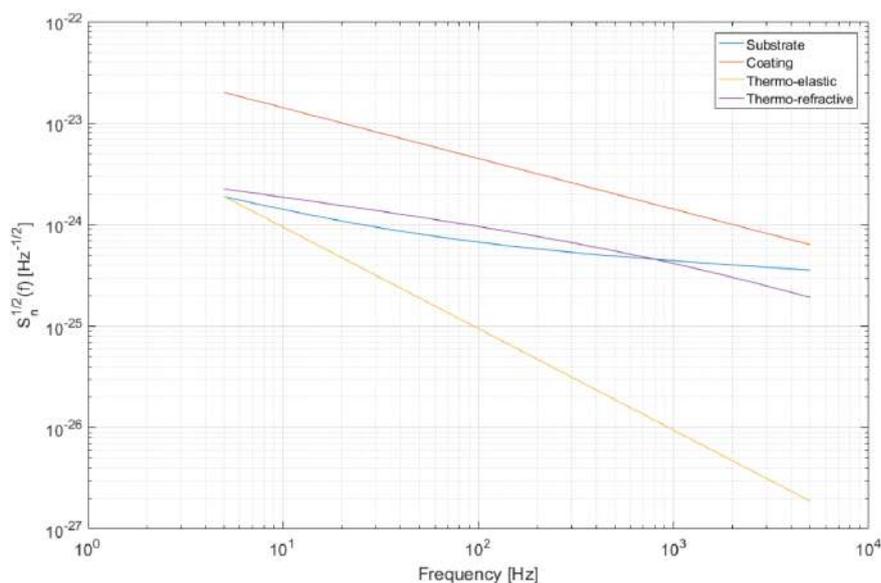


Figura 1.11 – Principali componenti del rumore termico, in cui viene riportata la radice della PSD attesa in funzione della frequenza. Il contributo dominante è dovuto al moto browniano del coating, ma vi sono da prendere in considerazione anche le fluttuazioni termo-rifrattive e termo-elastiche dello specchio.

³Definito come il raggio del fascio luminoso sulla faccia dello specchio a cui l'intensità della luce è pari a $1/e$ dell'intensità massima.

Rumore di gas residuo

La luce che attraversa l'interferometro è soggetta al fenomeno della diffusione dovuta alle molecole di gas residue presenti nell'apparato. Esse provocano così una fluttuazione dell'indice di rifrazione che si traduce in un rumore di fase del fascio laser. La densità spettrale del rumore associato a questa fluttuazione dipende dalle caratteristiche della particella di gas. In Virgo i valori limite per le pressioni parziali al di sotto dei quali questo effetto diventa trascurabile è pari a 10^{-8} mbar per l'idrogeno molecolare e 10^{-7} mbar per tutti gli altri gas. Questi valori sono caratteristici di un ambiente in condizione di ultra vuoto. Si rende perciò necessario realizzare un vuoto elevato all'interno dell'interferometro. Ad esempio, all'interno delle torri, nella parte inferiore dov'è collocato il *payload*, la pressione è quella di un ambiente di ultra-alto vuoto, 10^{-9} mbar, mentre nella parte alta contenente il superattenuatore (Fig. 1.12) e nei tubi che collegano tra loro le torri, il limite sul valore di pressione è meno stringente rispetto a quello della zona inferiore, ed è pari a 10^{-6} mbar. Le molecole di gas residuo in prossimità del payload oltre a determinare una variazione di fase nel fascio laser sono responsabili del meccanismo di tipo viscoso (*gas damping*) che, agendo sugli specchi, contribuisce ad aumentarne il rumore termico. Per questi motivi si è reso necessario un sistema da vuoto estremamente complesso: la camera da vuoto di Virgo, infatti, è la più grande d'Europa.

Rumore sismico

Un'altra sorgente di rumore intrinseco nella rivelazione interferometrica è il rumore sismico che, come si vede dalla Fig. 1.10, domina a basse frequenze ($1 \div 10$) Hz. Questo rumore è dovuto alle vibrazioni della crosta terrestre – in continuo movimento – che si propagano fino agli specchi. Nel caso di Virgo, l'entità dello spostamento del terreno dovuto all'attività sismica risulta essere:

$$\sqrt{S_{\text{sism}}(f)} \sim A \left(\frac{1}{fv} \right) \left[\frac{\text{m}}{\sqrt{\text{Hz}}} \right], \quad (1.41)$$

con $v \sim 2$ e $A \sim 10^{-7}$. Dividendo per la lunghezza del braccio si ottiene una densità spettrale molto maggiore rispetto alla sensibilità che vorremmo. Si può ridurre il rumore sismico attraverso un sistema di pendoli che tengono sospesi gli specchi. Consideriamo una massa m sospesa verticalmente all'estremità di una molla (pendolo semplice), avente lunghezza l , costante di richiamo $k = mg/l$ e massa trascurabile. Il moto della massa m può avvenire solo lungo la verticale ed è smorzato da una forza di attrito viscoso con coefficiente di attrito λ . Sia $f(t)$ una sollecitazione esterna che modifica la posizione di equilibrio della massa sospesa. Sotto queste condizioni, l'equazione del moto del sistema è:

$$m\ddot{x}(t) + \lambda\dot{x}(t) + kx(t) = f(t). \quad (1.42)$$

Nel dominio delle frequenze, l'Eq. (1.42) diventa:

$$-\omega^2 X(\omega) + i \frac{\lambda}{m} \omega X(\omega) + \omega_0^2 X(\omega) = F(\omega), \quad (1.43)$$

dove $\omega_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}}$ è la pulsazione di risonanza dell'oscillatore. La funzione di trasferimento associata all'equazione del moto è:

$$H(\omega) = \frac{X(\omega)}{F(\omega)} = \frac{\omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega^2 + i \frac{\lambda}{m} \omega}, \quad (1.44)$$

dove $X(\omega)$ è la risposta dello specchio alla sollecitazione. Dall'Eq. (1.44) si può affermare che:

- per $\omega \ll \omega_0$ la funzione di trasferimento è:

$$H(\omega) \approx 1, \quad (1.45)$$

cioè tutta la sollecitazione si trasferisce sulla massa sospesa;

- per $\omega \simeq \omega_0$, il rumore è amplificato di una quantità pari al fattore di merito $Q = \omega_0 m / \lambda$;
- per $\omega \gg \omega_0$, le vibrazioni sono attenuate di un fattore del tipo:

$$H(\omega) \simeq \left(\frac{f_0}{f} \right)^2. \quad (1.46)$$

Nel caso in cui si abbiano N stadi di pendolo per disaccoppiare il movimento orizzontale dello specchio:

$$H(\omega) \simeq \left(\frac{f_0}{f} \right)^{2N}. \quad (1.47)$$

Alla frequenza $f = 10$ Hz, dalla Eq. (1.41), si ha:

$$S_N(10 \text{ Hz}) \sim 10^{-11}; \quad (1.48)$$

poiché il target di Virgo è raggiungere una sensibilità tale da discriminare lo spostamento degli specchi dovuto al passaggio di una GW – $S_N(f) \sim 10^{-21} 1/\sqrt{\text{Hz}}$ –, il fattore di attenuazione desiderato è 10^{10} . La frequenza di risonanza di un pendolo f_0 risulta pari a:

$$f_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{l}}, \quad (1.49)$$

dove $g = 9.8 \text{ m s}^{-2}$ è l'accelerazione di gravità e l la lunghezza del braccio. Ad esempio, per $l = 1 \text{ m}$ si ha $f_0 = 0.5 \text{ Hz}$. Quindi, dall'Eq. (1.47), si ottiene che il numero di stadi di pendolo necessari per ottenere l'attenuazione desiderata è $N = 5$. I cinque filtri meccanici costituiscono il *superattenuatore*, visibile in Fig. 1.12, che unitamente al pendolo invertito e all'ultimo stadio di sospensione costituiscono il sistema di sospensione meccanica degli specchi. Con una catena di pendoli di questo tipo, in cui ognuno di essi è sospeso alla massa del pendolo superiore, in modo da formare un pendolo a N stadi, una oscillazione a frequenza f superiore ai modi normali della catena viene trasmessa alla massa sospesa con una attenuazione proporzionale a f^{-2N} .

Nonostante tutto, si hanno diverse complicazioni; una delle quali deriva dal fatto che i fili del pendolo che sostengono gli specchi terminali, alle estremità dei rami da 3 km di Virgo, non sono paralleli tra di loro e formano un angolo di qualche mrad a causa delle diverse direzioni della verticale locale sulla superficie curva della Terra. Si introducono quindi variazioni significative della distanza tra gli specchi, che devono essere opportunamente attenuate. Si può ovviare al problema sostituendo tutti i fili di sospensione con altrettante molle in modo da creare una cascata di oscillatori verticali. La molla dovrà essere resistente, in modo da riuscire a sostenere un carico pesante, ma anche abbastanza morbida da avere una bassa frequenza di risonanza. Per ridurre la forza di richiamo verticale e mantenere la frequenza di risonanza di ciascun filtro al di sotto di quella del pendolo, è stato sviluppato un sistema di “anti-molla magnetica”. Questo sistema serve a compensare l'effetto della molla abbassando la sua frequenza propria di risonanza.

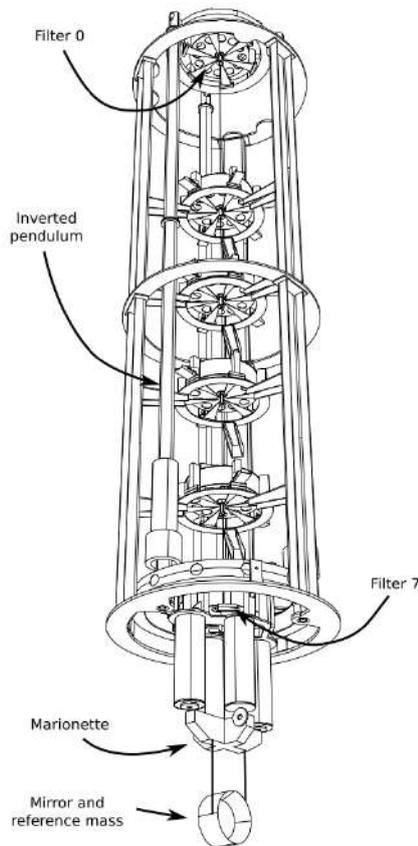


Figura 1.12 – Schema del sistema di isolamento sismico di Virgo costituito dal superattenuatore. Questa struttura alta ~ 10 m ed ancorata al suolo, consiste in un pendolo invertito, ovvero in una catena di filtri meccanici sospesi da una piattaforma, ciascuno collegato al precedente attraverso un pendolo (filo metallico) in modo da disaccoppiare il movimento orizzontale del punto di sospensione. L'intero sistema di sospensione arriva a pesare ~ 150 kg e funziona come un filtro passa-basso al di sopra della sua frequenza di risonanza.

Rumore Newtoniano

Fortemente legato al rumore sismico è il *rumore newtoniano* (*NN*), o altrimenti detto *gradiente gravitazionale*: il motivo è dovuto al fatto che questo disturbo è legato ai gradienti di gravità prodotti dalle fluttuazioni di posizione – e al second'ordine di densità – della materia che circonda le masse di test dell'interferometro. Le fluttuazioni di masse indotte dalle onde sismiche nel suolo (ma anche da fenomeni atmosferici o antropici) generano fluttuazioni di gravità che, accoppiandosi direttamente con le masse di test, causano un rumore di spostamento sullo specchio in diretta competizione con lo spostamento prodotto dal passaggio di un'onda gravitazionale: non è infatti possibile distinguere (ad oggi) i due segnali. Il rumore newtoniano, che domina a basse frequenze in un range ($5 \div 50$) Hz, rimane tutt'ora non misurabile in modo esplicito, : ciò sarà possibile solamente quando AdV raggiungerà la sensibilità di progetto.

Come descritto più in dettaglio nel Cap. 2, le onde sismiche che danno il contributo maggiore in questo rumore sono le onde-P e le onde superficiali di Rayleigh le quali, producendo compressioni e dilatazioni durante il loro passaggio, inducono rilevanti fluttuazioni di densità locale nelle rocce cristalline. Una mitigazione di questo effetto

può essere ottenuta posizionando i rivelatori laddove il rumore sismico risulta minore (gli interferometri di terza generazione, infatti, saranno costruiti sotto terra), oppure disponendo di sensori sismici (quali accelerometri, tiltometri, ...) nei dintorni delle masse di test al fine di misurare direttamente il movimento sismico e correggere il segnale rivelato con modelli opportuni (quest'ultima procedura risulta essere il cardine su cui è incentrato il mio lavoro).

Le sorgenti di rumore sopracitate sono solo alcune di quelle che interessano Virgo (Fig. 1.10). Ve ne sono molte altre [9] che non ho trattato poiché non fondamentali ai fini di questa tesi. Riferendosi sempre alla Fig. 1.10 si può osservare che la banda in cui l'interferometro risulta più sensibile è nell'intervallo (100 ÷ 300) Hz, mentre l'intensità del rumore che ci interessa e di cui discuterò in modo più approfondito nel prossimo capitolo, rimane al di sotto della curva di sensibilità di Virgo. Con gli interferometri di nuova generazione, dotati di sensibilità molto più elevate, risulterà di fondamentale importanza ridurre il rumore newtoniano, il quale si dimostrerà dominante a basse frequenze.

CAPITOLO 2

RUMORE NEWTONIANO

Le fluttuazioni gravitazionali, chiamate più semplicemente con il nome di rumore newtoniano (NN) come già discusso nella Sottosez. 1.3.2 del capitolo precedente, sono una fonte limitante per i rivelatori interferometrici terrestri [10], previste per la prima volta da Weiss [11], e analizzate in dettaglio inizialmente da Saulson [12]. Possono essere classificate in due categorie principali: sismico ed atmosferico. Il NN atmosferico è prodotto da cambiamenti di pressione ed advezione (ovvero un trasporto per effetto del moto complessivo del fluido, come aria o acqua) dei campi di temperatura ed umidità. Il contributo del NN atmosferico nei rivelatori interrati, in cui viene notevolmente ridotto, è molto vicino alla curva di sensibilità nel range di frequenze di pochi Hertz: da una campagna osservativa sulle fluttuazioni di densità atmosferiche eseguita presso Virgo [13] si è evidenziata l'importanza della mitigazione del rumore acustico nel building nei futuri upgrade dell'interferometro. Non non mi soffermerò su questa particolare componente del rumore newtoniano poiché non inerente ai fini della tesi: per ulteriori approfondimenti si faccia riferimento all'articolo [14]. I principi fondamentali riguardanti esclusivamente la composizione sismica del NN, invece, verranno discussi in dettaglio al fine di comprendere meglio i calcoli effettuati nella Sez. 2.2 riguardante le perturbazioni gravitazionali.

2.1 Teoria onde sismiche

Le onde sismiche si classificano generalmente in due grandi tipologie – onde di volume e di superficie [14] [15]– che a loro volta presentano ulteriori sotto-categorie.

Onde-P. Le onde di volume più veloci che per prime giungono, ad esempio, dopo un terremoto sono le onde primarie, comunemente chiamate “onde-P”. Sono onde longitudinali, poiché al loro passaggio ogni porzione di materia si dilata e si comprime alternativamente alla direzione di propagazione dell'onda (lo spostamento risulta quindi parallelo alla direzione di propagazione). Queste onde di compressione sono caratterizzate da una frequenza $\omega = \mathbf{k}^P \alpha$ dove $\alpha = \sqrt{(\lambda + 2\mu)/\rho}$ rappresenta la velocità dell'onda in termini delle costanti di Lamé λ e μ e della densità del mezzo ρ mentre \mathbf{k}^P denota il vettore d'onda. Negli strati superficiali della crosta terrestre, valori di

velocità tipici delle onde-P sono $(500 \div 1000) \text{ m s}^{-1}$ ed il loro spostamento può essere scritto come segue:

$$\xi^P(\mathbf{r}, t) = \hat{e}_k \xi_0^P(\mathbf{k}^P, \omega) e^{i(\mathbf{k}^P \cdot \mathbf{r} - \omega t)} . \quad (2.1)$$

Onde-S. Sono onde di taglio, denominate onde secondarie, poiché hanno una velocità $\beta = \sqrt{\mu/\rho}$ inferiore alle P – β assume valori nel range $(250 \div 600) \text{ m s}^{-1}$ –. Sono onde trasversali che provocano nel materiale attraversato uno spostamento perpendicolare alla direzione di propagazione dell'onda. Esse si propagano solamente nei solidi (siccome $\mu = 0$ nei fluidi) e, a differenza delle onde-P, non causano una variazione di volume al loro passaggio. Lo spostamento per queste onde si può scrivere come:

$$\xi^S(\mathbf{r}, t) = \hat{e}_p \xi_0^S(\mathbf{k}^S, \omega) e^{i(\mathbf{k}^S \cdot \mathbf{r} - \omega t)} , \quad (2.2)$$

in cui abbiamo denominato \hat{e}_p il vettore polarizzazione, per cui vale la relazione $\hat{e}_p \cdot \mathbf{k}^S = 0$.

Insieme, le onde-P e le onde-S sono indicate come “*body waves*”, poiché si propagano in tutte le direzioni attraverso il mezzo, ed il loro spostamento complessivo può essere scritto in termini dei potenziali di Lamé:

$$\xi(\mathbf{r}, t) = \nabla \phi_S(\mathbf{r}, t) + \nabla \times \psi_S(\mathbf{r}, t) , \quad (2.3)$$

dove $\phi_S(\mathbf{r}, t)$ e $\psi_S(\mathbf{r}, t)$ sono rispettivamente i potenziali delle onde-P e delle onde-S, utilizzati spesso al fine di agevolare il calcolo di integrali che coinvolgono il campo sismico $\xi(\mathbf{r}, t)$.

L'interazione tra le onde descritte produce delle *onde superficiali* che si propagano (e sono confinate) negli strati più esterni della crosta terrestre. Questa classe di onde è caratterizzata da un'ampiezza maggiore rispetto alle onde di volume, che si riduce esponenzialmente con la profondità, e da una velocità dipendente dal periodo dell'onda stessa. Data la loro ampiezza e frequenza le onde di superficie sono in generale responsabili dei principali danni causati dai terremoti e possono essere suddivise in: onde di Rayleigh e onde di Love.

Onde di Love. Sono onde-S polarizzate orizzontalmente, in cui il moto particellare associato è descritto da un'oscillazione trasversale rispetto alla direzione di propagazione dell'onda. Poiché non sono composte da alcuna componente d'onda-P, le onde di Love non implicano compressioni nel mezzo attraverso il quale si propagano. La loro ampiezza diminuisce esponenzialmente con la profondità, ma solo come $r^{-1/2}$ con la distanza r percorsa. La loro velocità di propagazione è di circa 90% β .

Onde di Rayleigh. Sono di fatto le uniche onde sismiche in grado di propagarsi su superfici di mezzi omogenei. Esse si generano quando nell'interazione tra le onde-S e le onde-P vi è uno sfasamento di 90° . La definizione di queste onde non richiede una superficie piana, ma per semplicità facciamo riferimento ad un semispazio omogeneo, in cui l'asse \hat{z} del nostro sistema cartesiano corrisponde alla direzione normale alla superficie, e con \mathbf{e}_z denotiamo il suo vettore normale. Il generico vettore d'onda \mathbf{k} può essere scomposto nella sua componente verticale \mathbf{k}_z ed orizzontale \mathbf{k}_ρ . In generale, il loro vettore spostamento può essere costruito tramite:

$$\xi(\mathbf{r}, t) = \xi_k(\mathbf{r}, t)\mathbf{e}_k + \xi_z(\mathbf{r}, t)\mathbf{e}_z . \quad (2.4)$$

Nel caso di mezzo stratificato, queste onde sono note con onde di Rayleigh *fondamentali*, per distinguerle da quelle di ordine superiore che si possono generare in mezzi come questo. Inoltre, in presenza di una superficie di separazione tra due tipi di mezzi differenti, l'insieme delle possibili soluzioni di onde di interfaccia è molto più variegato, ma è possibile calcolare perturbazioni gravitazionali generate da altre onde – ad esempio le onde di Stoneley¹ – utilizzando le stesse equazioni per le onde di Rayleigh, che discuteremo nella prossima Sez. 2.2. Al passaggio di queste onde le particelle di terreno oscillano compiendo orbite ellittiche retrograde in un piano verticale contenente la direzione di propagazione. La velocità delle onde fondamentali di Rayleigh, pari a $v_R = k_\rho/\omega$, con k_ρ numero d'onda orizzontale, si ottiene dall'equazione:

$$R((v_R/\beta)^2) = 0, \quad (2.5)$$

$$R(x) = x^3 - 8x^2 + 8x \frac{2-\nu}{1-\nu} - \frac{8}{1-\nu}, \quad (2.6)$$

dove ν rappresenta il coefficiente di Poisson, una delle proprietà utilizzate per descrivere l'elasticità di un solido: viene definito come il rapporto tra la deformazione provocata da una contrazione trasversale e la deformazione di estensione longitudinale nella direzione della forza agente. La soluzione reale dell'Eq. (2.5) è nota come *polo di Rayleigh*, poiché la stessa funzione appare nel denominatore dei coefficienti di riflessione superficiale (per un approfondimento dettagliato sull'approssimazione della velocità delle onde di Rayleigh si rimanda a [referenza draft06rayleigh]). Una relazione utile per legare la velocità delle onde di volume (α , β) a quella di Rayleigh v_R è la seguente:

$$\beta = \alpha \sqrt{\frac{1-2\nu}{2-2\nu}}. \quad (2.7)$$

In accordo con le equazioni (2.5) e (2.7), date le velocità delle onde di taglio β e di compressione α , v_R rimane in funzione unicamente di ν come mostrato dalla Fig. 2.1, nella quale sono graficati i valori delle diverse velocità delle onde di volume e delle onde di Rayleigh in termini di β : si può osservare come v_R sia poco al di sotto dei valori di velocità per le onde-S.

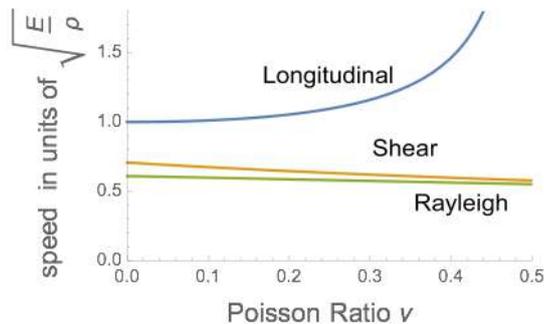
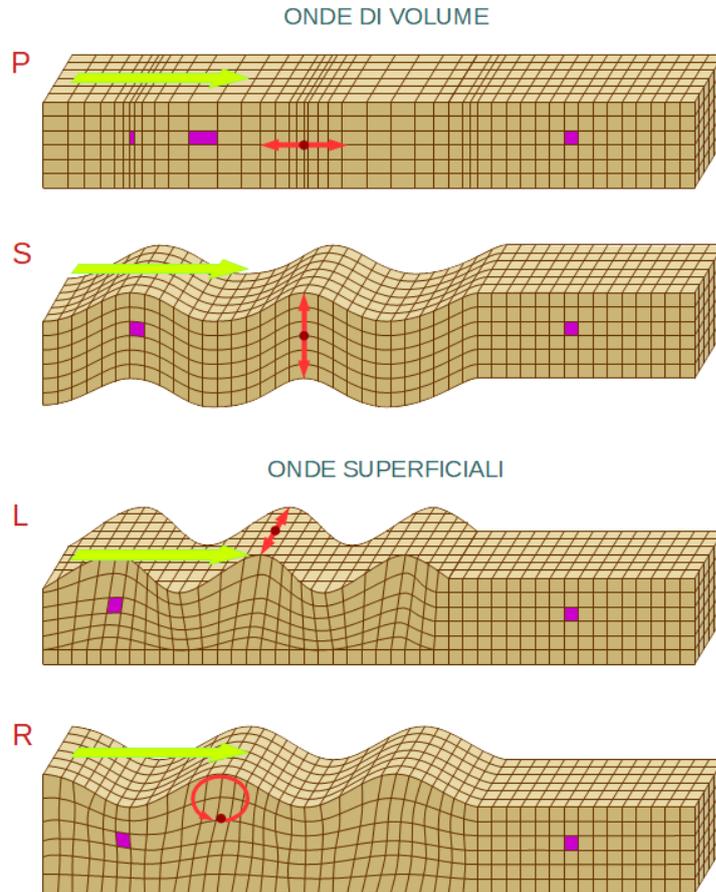
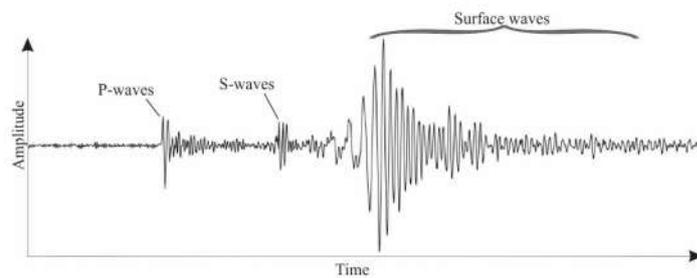


Figura 2.1 – Velocità delle onde-P, onde-S e di Rayleigh in termini della velocità delle onde-S (β), in funzione del coefficiente di Poisson ν .

¹Rappresentano un particolare tipo di onde di Rayleigh a bassa frequenza, che si propagano lungo l'interfaccia tra fluidi e solidi.



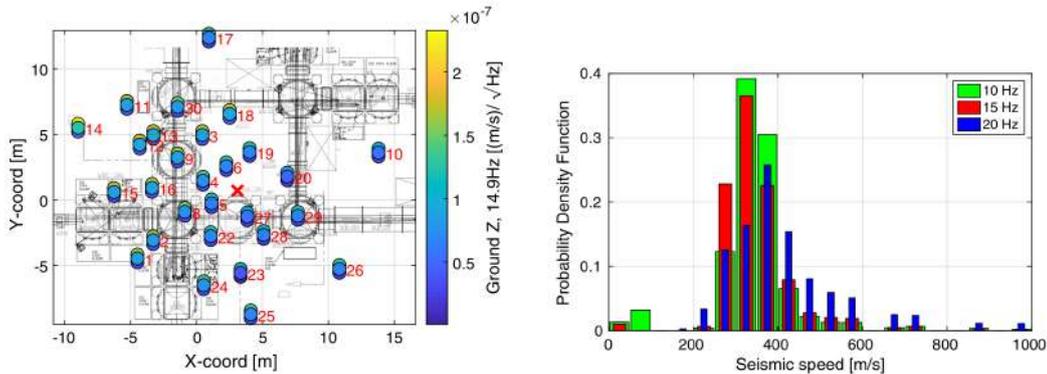
- (a) *Illustrazione delle principali tipologie di onde sismiche in un solido (nell'ordine: onde-P, onde-S, onde di Love e onde di Rayleigh). Il verso della freccia verde indica la direzione di propagazione, mentre le frecce rosse indicano il moto particellare associato a ciascun tipo di onda.*



- (b) *Sismogramma – grafico rappresentante una forma d'onda in ampiezza in funzione del tempo – di un terremoto rilevato in un punto sulla superficie terrestre.*

Figura 2.2 – Peculiarità delle onde sismiche.

Già nel 1955 Miller e colleghi [16] avevano scoperto, studiando la percentuale di potenza irradiata dai vari tipi di onde elastiche, che la principale componente all'energia sismica totale proveniva dalle onde di Rayleigh (67.3%) seguita dalle onde-S (25.8%) e poi dalle onde-P (6.9%). Infatti, da misure di campo sismico effettuate presso LIGO (Handford) [17], in particolare dal calcolo della velocità dell'onda sismica sulla massa di test, si è accertato che la principale componente delle onde sismiche – tra le frequenze rilevanti per il caso in questione – per la cancellazione del SNN è quella delle onde di Rayleigh. In Fig. 2.3a è rappresentata la disposizione dei sensori sismici – insieme ad un tiltometro², indicato con una croce rossa – per la misura dei valori di velocità delle onde sismiche riportati nell'istogramma 2.3b in cui si nota, infatti, che tali quantità in media corrispondono circa a 300 m s^{-1} a 10 e 15 Hz e 380 m s^{-1} a 20 Hz, risultati del tutto coerenti con la velocità delle onde di Rayleigh. Infatti, anche se la vera composizione delle onde sismiche superficiali rimane sconosciuta, è ragionevole supporre che le onde di Rayleigh siano il contributo principale allo spettro lungo la direzione verticale – sempre a frequenze che interessano il rumore newtoniano – poiché si accoppiano più fortemente alle sorgenti superficiali o limitrofe [14].



(a) Disposizione dell'array di sensori presso LIGO Handford per la misura della velocità delle onde sismiche sulla massa di test. La croce rossa indica la posizione del tiltometro, integrato all'array di sensori, per una dettagliata caratterizzazione del campo sismico durante i primi mesi del run osservativo O2.

(b) Iistogramma che riporta le misure di velocità delle onde sismiche tramite i dati forniti dagli array di sensori disposti a LIGO Handford per valori di frequenza corrispondenti a 10, 15 e 20 Hz.

Figura 2.3 – Velocità delle onde sismiche.

2.2 Fluttuazione del campo gravitazionale

Nel caso di un interferometro terrestre, quale AdV, le fluttuazioni di masse indotte dalle onde sismiche nel suolo generano fluttuazioni di gravità che, accoppiandosi direttamente con le masse di test, causano un rumore di spostamento in diretta competizione con lo spostamento prodotto dal passaggio di un'onda gravitazionale. Questo disturbo viene

²Un tiltometro è uno strumento molto sensibile a cambiamenti di inclinazione del livello verticale, sia a terra che nelle strutture. È stato utilizzato da LIGO Handford per una dettagliata caratterizzazione del campo sismico durante i primi mesi del run osservativo O2.

chiamato *rumore sismico newtoniano* (SNN). Ricaveremo ora le principali equazioni che descrivono la connessione tra i campi sismici e le perturbazioni gravitazionali associate (per qualunque approfondimento si faccia riferimento a [14]).

Come già accennato, le fluttuazioni di posizione prodotte dalle onde sismiche danno origine a fluttuazioni di densità locali (di second'ordine) della materia che circonda le masse di test dell'interferometro. Partendo dall'equazione di continuità:

$$\delta\rho(\mathbf{r}, t) = -\nabla \cdot (\rho(\mathbf{r})\boldsymbol{\xi}(\mathbf{r}, t)) , \quad (2.8)$$

la quale fornisce un'espressione per la perturbazione di densità prodotta dallo spostamento sismico, possiamo scrivere la variazione del potenziale gravitazionale generata da essa nel punto \mathbf{r}_0 come segue:

$$\delta\phi(\mathbf{r}_0, t) = -G \int dV \frac{\delta\rho(\mathbf{r}, t)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} , \quad (2.9)$$

in cui si è assunto che le variazioni di densità siano molto piccole rispetto alla densità imperturbata, ovvero $\delta\rho(\mathbf{r}, t) \ll \rho(\mathbf{r})$. Esplicitando $\delta\rho(\mathbf{r}, t) = \nabla \cdot (\rho(\mathbf{r})\boldsymbol{\xi}(\mathbf{r}, t))$ e svolgendo l'operazione di gradiente si ottiene la perturbazione gravitazionale in forma di dipolo:

$$\delta\phi(\mathbf{r}_0, t) = G \int dV \rho(\mathbf{r})\boldsymbol{\xi}(\mathbf{r}, t) \cdot \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_0}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^3} , \quad (2.10)$$

la quale risulta essere molto utile quando si effettuano simulazioni numeriche ad elementi finiti, in cui ciascun elemento di mesh è dotato di una massa pari a $\rho(\mathbf{r}, t) dV$. La corrispondente variazione dell'accelerazione di gravità risulta quindi:

$$\begin{aligned} \delta\mathbf{a}(\mathbf{r}_0, t) &= -G \int dV \rho(\mathbf{r}) (\boldsymbol{\xi}(\mathbf{r}, t) \cdot \nabla_0) \cdot \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_0}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^3} = \\ &= G \int dV \rho(\mathbf{r}) \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^3} (\boldsymbol{\xi}(\mathbf{r}, t) - 3(\mathbf{e}_{rr_0} \cdot \boldsymbol{\xi}(\mathbf{r}, t))\mathbf{e}_{rr_0}) , \end{aligned} \quad (2.11)$$

dove $\mathbf{e}_{rr_0} \equiv (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)/|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|$ e ∇_0 denota l'operazione di gradiente rispetto a \mathbf{r}_0 . Da notare che l'Eq. (2.11) descrive perturbazioni gravitazionali dovute alle onde sismiche dentro un bulk infinito (adatto a rivelatori sotterranei quali ET) ma anche conformi a rivelatori in superficie, quali AdV e AdL.

Modello analitico. Il SNN è stato studiato e discusso in precedenza da Saulson [12] utilizzando un semplice modello dei moti sismici terrestri, nel quale si è calcolata la forza F dovuta alle fluttuazioni di densità di un mezzo omogeneo. In Fig. 2.4 viene mostrata una schematizzazione del SNN prodotto dalla fluttuazione $\Delta M(t) = M(t) - \langle M(t) \rangle$ della regione di massa $M(t)$ sulle masse di test m di un interferometro di onde gravitazionali avente bracci di lunghezza L . Per quanto già discusso in precedenza, infatti, tale fluttuazione produce su m un'accelerazione a e di conseguenza una forza gravitazionale di intensità pari a:

$$\mathbf{F}(t) = m\mathbf{a} = m \frac{G\Delta M(t)}{r^2} \hat{\mathbf{r}} . \quad (2.12)$$

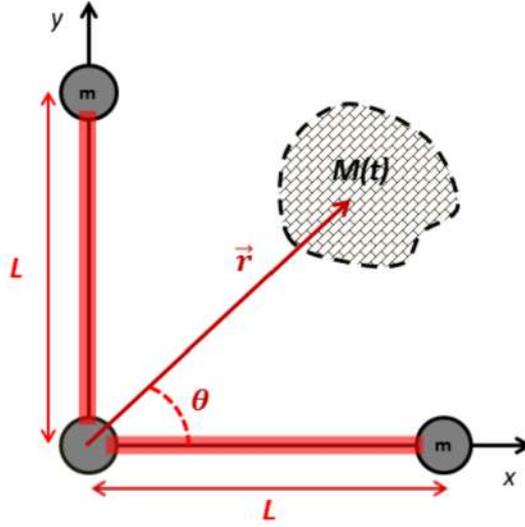


Figura 2.4 – Schema di generazione del rumore newtoniano in un rivelatore di GW: la perturbazione della regione di massa $M(t)$ induce una variazione dell'accelerazione gravitazionale sulle masse di test m presenti nell'interferometro avente bracci di lunghezza L .

Attraverso vari calcoli ed approssimazioni³ (per una trattazione esplicita si rimanda a [12]) si arriva ad ottenere la *funzione di trasferimento* del rumore newtoniano, cioè una relazione tra $|\Delta x(\omega)| \equiv \tilde{x}_{\text{NN}}(\omega)$, che rappresenta la densità spettrale di ampiezza (ASD)⁴ delle oscillazioni indotte dal SNN sulla massa di test, in termini dell'ASD delle oscillazioni di fondo prodotte dal rumore sismico, vale a dire $|\Delta X(\omega)| \equiv \tilde{x}_{\text{seis}}(\omega)$:

$$\tilde{x}_{\text{NN}}(\omega) \approx \frac{G\rho}{\sqrt{3}\pi f^2} \tilde{x}_{\text{seis}}(\omega) \quad (2.13)$$

dove ρ rappresenta la densità locale della regione di massa variabile e dove con $X(\omega)$ e $x(\omega)$ si sono chiamati rispettivamente lo spostamento di un punto sulla superficie (prodotto dal passaggio, ad esempio, di un'onda sismica) rispetto alla sua posizione di equilibrio e lo spostamento indotto sulle masse di test. Prendendo in considerazione un valore medio di ρ del terreno vicino ad AdV pari a $\rho \approx 2 \cdot 10^3 \text{ kg m}^{-3}$ otteniamo:

$$\tilde{x}_{\text{NN}}(f) \approx \frac{2.4 \cdot 10^{-8}}{f^2/\text{Hz}^2} \tilde{x}_{\text{seis}}(f) . \quad (2.14)$$

L'Eq. (2.14) mostra la forte dipendenza del rumore newtoniano dall'attività sismica, la quale contribuisce in modo rilevante alla perturbazione gravitazionale attraverso le onde-P e le onde di Rayleigh (come già descritto nella precedente Sez. 2.1). È quindi ragionevole supporre che il SNN venga attenuato:

³Tra le varie approssimazioni effettuate vi è quella di considerare la massa di test sospesa ad un pendolo, in modo che il sistema in esame possa essere descritto come un oscillatore, nonché assumere che le forze in questione generate da masse variabili in regioni diverse siano non correlate e indipendenti tra loro (affermazione valida solo nel caso in cui $\lambda_R \ll L$).

⁴In generale, l'ASD rappresenta la radice della densità spettrale di potenza (PSD), cioè $\text{ASD} = \sqrt{\text{PSD}}$.

- ② costruendo interferometri interrati – vedi Einstein Telescope (ET) –, scelta legata al comportamento delle onde sismiche negli strati più profondi, dove le velocità di propagazione sono più elevate e le onde superficiali smorzate;
- ② aumentando la dimensione dei rivelatori (in particolare la lunghezza dei bracci dell'interferometro), come mostrato dalla Fig. 2.5, diminuendo così le componenti della densità spettrale delle fluttuazioni gravitazionali;
- ② sospendendo le masse di test ed eventuali ottiche a catene di pendoli, che agiscono da filtri meccanici, come realizzato per AdV (si veda Fig. 1.12).

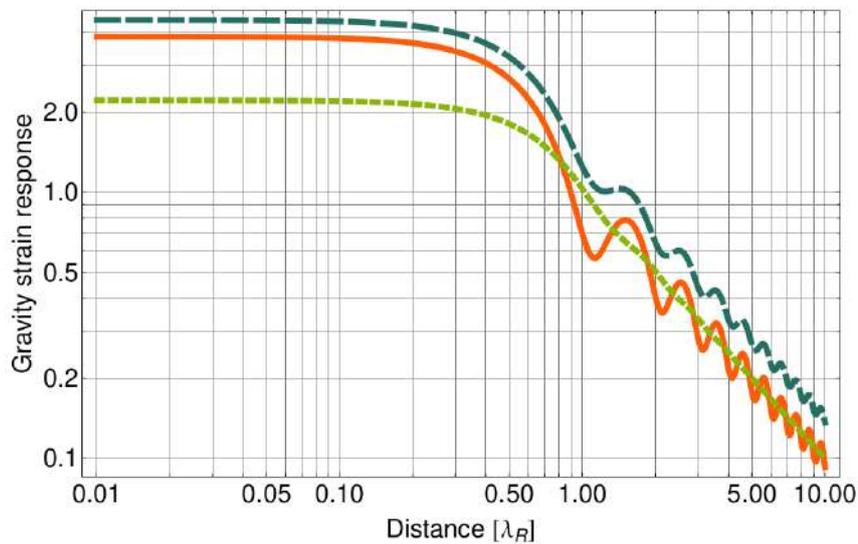


Figura 2.5 – Strain in risposta ad una perturbazione gravitazionale di Rayleigh: la curva rossa e la curva verde mostrano le risposte orizzontali ad una perturbazione, mentre la curva blu tratteggiata mostra la risposta verticale. Sull'asse delle ascisse è riportata la lunghezza L in unità di λ_R mentre in ordinate è riportata la radice quadrata delle componenti, per una migliore comprensibilità di visualizzazione [14].

Si osservi che la presenza del superattenuatore riduce gli effetti diretti del rumore sismico sulla massa di test, ma non agisce direttamente sull'attenuazione del rumore newtoniano: l'accoppiamento tra lo spostamento del terreno e la massa di test dovuto a tale rumore, infatti, oltre ad essere indiretto non è del tutto ovvio, ma dipende fortemente dalla geometria del terreno e dalla distribuzione degli spostamenti⁵ attorno allo specchio, in base alla quale verranno generati dei gradienti di campo gravitazionale e quindi una forza risultante su di esso. Comportandosi come un pendolo soggetto ad una forza, lo specchio sarà caratterizzato da uno spostamento.

In Fig. 2.6 è rappresentata (in scala bi-logaritmica) una stima della ASD del SNN predetto da Virgo utilizzando i dati provenienti dallo spostamento dei sensori sismici lungo la direzione verticale⁶ (avendo posto la massa di test a 1 m di altezza da terra) insieme alla sensitività (curva nera) di AdV, presa come riferimento. Si può osservare un

⁵Infatti, nel caso particolare in cui si abbiano degli spostamenti puntuali e di tipo casuale, l'effetto complessivo di spostamento dello specchio tenderebbe ad annullarsi.

⁶La scelta di utilizzare la componente dello spostamento lungo \hat{z} dei sensori sismici si fonda su due accorgimenti: per prima cosa, le componenti lungo \hat{x} e \hat{y} contengono contributi dovuti alle onde di Love,

andamento $\propto 1/f^4$, conforme – al netto degli opportuni fattori di conversione – al fatto che lo spettro sismico abbia invece un andamento $\propto 1/f$ come evidente dall’Eq. (2.14). Dunque il SNN si trova, soprattutto a frequenze sotto i 10 Hz, al di sotto di altri rumori strumentali: di per sé, quindi, non risulta essere una sorgente di rumore limitante per AdV; nonostante ciò, si ritiene che in alcuni transienti particolarmente intensi del campo sismico, il SNN possa diventare dominante su altri rumori a bassa frequenza.

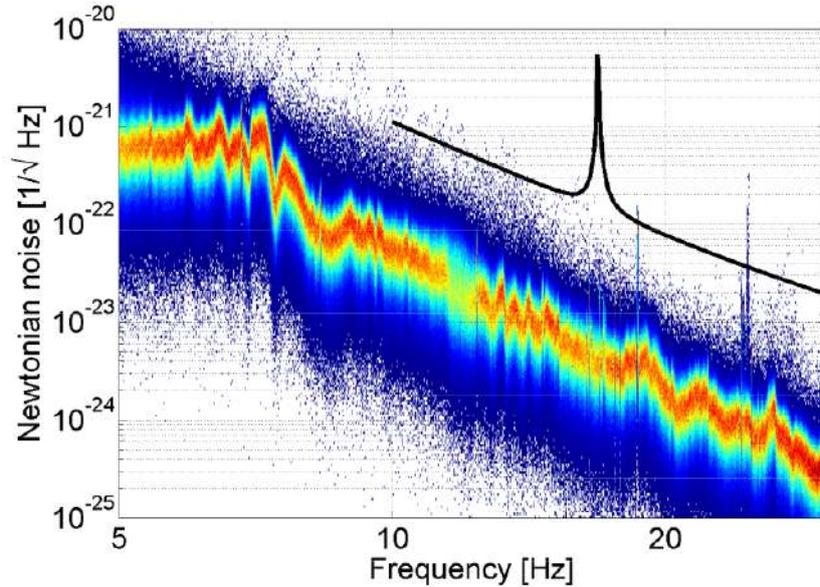


Figura 2.6 – Istogramma del SNN in funzione della frequenza predetto dall’interferometro Virgo.

2.3 Cancellazione rumore newtoniano

In base a quanto appena esplicitato, risulta chiaro come sia necessario un sistema di cancellazione del rumore sismico newtoniano: il sistema di uso più frequente è basato sull’utilizzo del *filtro di Wiener*, che verrà di seguito spiegato.

Tale filtro è di fondamentale importanza anche per la comprensione di alcune procedure utilizzate nel prosieguo della trattazione.

2.3.1 Filtro di Wiener

Negli anni ’40 del secolo scorso, Norbert Wiener ed Andrei Kolmogorov (in maniera indipendente) formularono la teoria di filtraggio tramite minimizzazione dell’errore quadratico [18].

Lo scenario tipico nel quale si fa uso del filtro di Wiener è quello nel quale si vuole stimare un segnale immerso in un rumore: in questa situazione, l’effetto del filtro è quello di rimuovere gli effetti di una distorsione lineare del segnale in questione.

note per non contribuire al NN [14]; la seconda ragione – come vedremo in modo più dettagliato nella Sotosez. 6.2.3 – è legata al fatto che uno spostamento lungo \hat{z} genera un avvicinamento-allontanamento diretto tra la massa δm e la massa di test, generando quindi un effetto maggiore.

Dominio del tempo. Il filtro di Wiener, in linea generale, è una “macchina” che prende in input un segnale $y(m)$, di solito una copia distorta di quello desiderato $x(m)$, e produce in output un segnale $\hat{x}(m)$, il quale indica la stima calcolata tramite minimizzazione dell’errore quadratico dello stesso segnale desiderato. Una schematizzazione a blocchi del filtro di Wiener è rappresentata in Fig. 2.7.

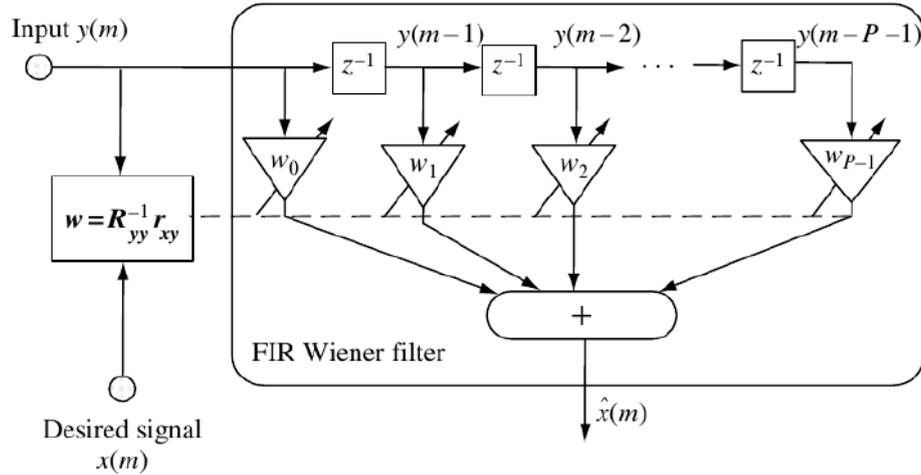


Figura 2.7 – Rappresentazione schematica della struttura del filtro di Wiener.

Si noti che i segnali in questione sono descritti nel dominio del tempo, quindi dovrebbero essere caratterizzati dalla variabile t ; è stata usata – in sua vece – la lettera m per indicare una variabile temporale discreta (anziché continua): considerando P segnali discreti, la relazione che lega input ed output del filtro è data da [18]:

$$\hat{x}(m) = \sum_{i=0}^{P-1} w_i y(m-i) = \mathbf{y}^T(m) \mathbf{w} , \quad (2.15)$$

dove

- ② $\mathbf{y}(m) = [y(m), y(m-1), \dots, y(m-P-1)]^T$ rappresenta il vettore in input al filtro,
- ② $\mathbf{w} = [w_0, w_1, \dots, w_{P-1}]^T$ il vettore dei coefficienti del filtro di Wiener,
- ② ed $\hat{x}(m)$ l’output del filtro stesso.

Il segnale di errore relativo al filtro di Wiener, identificato come $e(m)$, viene definito come la differenza tra il segnale cercato e l’uscita del filtro stesso; facendo uso anche dell’Eq. (2.15), si può scrivere:

$$e(m) = x(m) - \hat{x}(m) = x(m) - \mathbf{y}^T(m) \mathbf{w} . \quad (2.16)$$

Si osservi che, quanto appena descritto, vale ad un generico m , cioè le Eq. (2.15) e (2.16) definiscono uscita ed errore associato al filtro calcolati ad un tempo (discreto) qualsiasi.

Formulazione matriciale: campionamento. Volendo prendere in esame un intervallo temporale campionato tramite N segnali discreti, è necessario descrivere le varie quantità rilevanti ad ognuno di questi tempi, cioè far “scorrere” l’indice temporale discreto $m = 0, \dots, N - 1$. La generalizzazione a vettore dei segnali attesi, delle uscite del filtro e dell’errore dello stesso è chiaramente banale, e si esplica in:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x(0) \\ x(1) \\ x(2) \\ \vdots \\ x(N-1) \end{bmatrix}, \quad \hat{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \hat{x}(0) \\ \hat{x}(1) \\ \hat{x}(2) \\ \vdots \\ \hat{x}(N-1) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{e} = \begin{bmatrix} e(0) \\ e(1) \\ e(2) \\ \vdots \\ e(N-1) \end{bmatrix}. \quad (2.17)$$

Occorre invece un minimo di attenzione nella generalizzazione del vettore \mathbf{y} : questo era un vettore colonna del tipo $P \times 1$ (dove P indicava il numero di segnali ad un qualsiasi istante m); per mantenere una certa coerenza, questo diventa una matrice \mathbf{Y} , costituita incolonnando di seguito i vettori \mathbf{y} al susseguirsi dei tempi discreti m , cioè:

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} y(0) & y(1) & y(2) & \dots & y(N-1) \\ y(-1) & y(0) & y(1) & \dots & y(N-2) \\ y(-2) & y(-1) & y(0) & \dots & y(N-3) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y(1-P) & y(2-P) & y(3-P) & \dots & y(N-P) \end{bmatrix}. \quad (2.18)$$

Quindi, in una compatta notazione matriciale, l’output del filtro di Wiener può essere espresso come $\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{Y}^T \mathbf{w}$, da cui chiaramente l’espressione per l’errore diventa [18]

$$\mathbf{e} = \mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}} = \mathbf{x} - \mathbf{Y}^T \mathbf{w}, \quad (2.19)$$

ed esplicitando:

$$\begin{bmatrix} e(0) \\ e(1) \\ e(2) \\ \vdots \\ e(N-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x(0) \\ x(1) \\ x(2) \\ \vdots \\ x(N-1) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} y(0) & y(-1) & y(-2) & \dots & y(1-P) \\ y(1) & y(0) & y(-1) & \dots & y(2-P) \\ y(2) & y(1) & y(0) & \dots & y(3-P) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y(N-1) & y(N-2) & y(N-3) & \dots & y(N-P) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_0 \\ w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_{P-1} \end{bmatrix}. \quad (2.20)$$

A questo livello, bisogna analizzare cosa accada al variare del numero N di campioni; ci sono tre differenti possibilità:

1. $N < P$, caso in cui il numero N di equazioni è insufficiente per la determinazione dei coefficienti del filtro (soluzione *indeterminata*);
2. $N = P$, caso in cui la matrice $[\mathbf{Y}]$ risulta quadrata e teoricamente esiste un’unica soluzione caratterizzata da $\mathbf{e} = \mathbf{0}$, in cui $\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{x}$ (soluzione *unica*);
3. $N > P$, caso in cui il numero delle equazioni è superiore ai gradi di libertà del filtro, e vi è soluzione con errore \mathbf{e} non nullo (soluzione *sovradeterminata*).

Errore quadratico medio. Nella pratica, ci si trova nella condizione $N > P$ e il segnale desiderato $x(m)$ non è solitamente disponibile, pertanto la procedura standard è quella di minimizzare la funzione dell'errore quadratico medio; dall'Eq. (2.16), si può scrivere:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[e^2(m)] &= \mathbb{E}\{[x(m) - \mathbf{y}^T(m)\mathbf{w}]^2\} = \\ &= \mathbb{E}[x^2(m)] - 2\mathbf{w}^T \mathbb{E}[\mathbf{y}(m)x(m)] + \mathbf{w}^T \mathbb{E}[\mathbf{y}(m)\mathbf{y}^T(m)]\mathbf{w} ;\end{aligned}\quad (2.21)$$

effettuando le identificazioni:

- $\mathbb{E}[\mathbf{y}(m)x(m)] = \mathbf{C}_{yx}$, cioè il vettore di cross-correlazione tra ingresso e segnale desiderato;
- $\mathbb{E}[\mathbf{y}(m)\mathbf{y}^T(m)] = \mathbf{C}_{yy}$, ossia la matrice di autocorrelazione del segnale di ingresso;

è possibile riscrivere l'Eq. (2.21) nella forma matriciale compatta [18]:

$$\mathbb{E}[e^2(m)] = \mathbb{E}[x^2(m)] - 2\mathbf{w}^T \mathbf{C}_{yx} + \mathbf{w}^T \mathbf{C}_{yy} \mathbf{w} . \quad (2.22)$$

Minimizzazione. Definendo opportunamente il vettore gradiente rispetto i coefficienti w_i come

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{w}} = \left[\frac{\partial}{\partial w_0}, \frac{\partial}{\partial w_1}, \frac{\partial}{\partial w_2}, \dots, \frac{\partial}{\partial w_{P-1}} \right]^T , \quad (2.23)$$

si può effettuare il gradiente rispetto a tali coefficienti della funzione che descrive l'errore quadratico medio; quindi, applicando l'operatore gradiente in Eq. (2.23) all'errore in Eq. (2.22), si ha:

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{w}} \mathbb{E}[e^2(m)] = -2\mathbf{C}_{yx} + 2\mathbf{C}_{yy} \mathbf{w} . \quad (2.24)$$

Al fine di imporre la condizione di errore quadratico medio minimo nel filtro di Wiener, bisogna imporre che il gradiente in Eq. (2.24) si annulli; questa richiesta dà luogo all'equazione [18]:

$$\begin{aligned}\mathbf{C}_{yy} \mathbf{w} &= \mathbf{C}_{yx} , \\ \implies \mathbf{w} &= \mathbf{C}_{yy}^{-1} \mathbf{C}_{yx} .\end{aligned}\quad (2.25)$$

Espandendo tale equazione si può scrivere:

$$\begin{bmatrix} w_0 \\ w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_{P-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{yy}(0) & C_{yy}(1) & C_{yy}(2) & \dots & C_{yy}(P-1) \\ C_{yy}(1) & C_{yy}(0) & C_{yy}(1) & \dots & C_{yy}(P-2) \\ C_{yy}(2) & C_{yy}(1) & C_{yy}(0) & \dots & C_{yy}(P-3) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{yy}(P-1) & C_{yy}(P-2) & C_{yy}(P-3) & \dots & C_{yy}(0) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} C_{yx}(0) \\ C_{yx}(1) \\ C_{yx}(2) \\ \vdots \\ C_{yx}(P-1) \end{bmatrix} ; \quad (2.26)$$

è utile osservare come la matrice di autocorrelazione non solo sia simmetrica⁷ ma sia anche una matrice di Toeplitz, cioè una matrice avente ogni diagonale parallela alla principale composta dallo stesso termine.

⁷Nel senso usuale del termine, cioè avente uguali ogni coppia di termini simmetrici rispetto alla diagonale principale.

Dominio della frequenza. Nel dominio della frequenza, l'uscita $\hat{X}(\omega)$ del filtro di Wiener è dato dal prodotto tra il segnale $Y(\omega)$ e la risposta in frequenza $W(\omega)$ del filtro:

$$\hat{X}(\omega) = W(\omega)Y(\omega) . \quad (2.27)$$

Sia $E(\omega)$ il segnale di errore stimato, definito come la differenza tra il segnale desiderato $X(\omega)$ e l'uscita $\hat{X}(\omega)$ del filtro, ossia in formule

$$E(\omega) = X(\omega) - \hat{X}(\omega) = X(\omega) - W(\omega)Y(\omega) , \quad (2.28)$$

allora l'errore quadratico medio corrispondente è dato da

$$\begin{aligned} \mathbb{E} [|E(\omega)|^2] &= \mathbb{E} \{ [X(\omega) - W(\omega)Y(\omega)][X(\omega) - W(\omega)Y(\omega)]^* \} = \\ &= \mathbb{E}[X(\omega)X^*(\omega)] - W^*(\omega)\mathbb{E}[X(\omega)Y^*(\omega)] + \\ &\quad - W(\omega)\mathbb{E}[Y(\omega)X^*(\omega)] + W(\omega)W^*(\omega)\mathbb{E}[Y(\omega)Y^*(\omega)] , \end{aligned} \quad (2.29)$$

dove il simbolo $*$ denota ovviamente il complesso coniugato.

Derivando quest'ultima espressione rispetto a $W^*(\omega)$ si ottiene⁸ (rammentando le formule di derivazione di una funzione di variabile complessa a valori complessi, ben descritta in App. B, ed in particolare i casi qui rilevanti nella sua Sottosez. B.3.3):

$$\frac{\partial \mathbb{E} [|E(\omega)|^2]}{\partial W^*(\omega)} = W(\omega)\mathbb{E}[Y(\omega)Y^*(\omega)] - \mathbb{E}[X(\omega)Y^*(\omega)] ; \quad (2.30)$$

ricordando che $\mathbb{E}[X(\omega)Y^*(\omega)] = S_{XY}(\omega)$ e $\mathbb{E}[Y(\omega)Y^*(\omega)] = S_{YY}(\omega)$ sono rispettivamente la densità spettrale di potenza incrociata – tra $X(\omega)$ ed $Y(\omega)$ – e la densità spettrale di potenza di $Y(\omega)$, si può riscrivere ancora:

$$\frac{\partial \mathbb{E} [|E(\omega)|^2]}{\partial W(\omega)} = W(\omega)S_{YY}(\omega) - S_{XY}(\omega) . \quad (2.31)$$

Imponendo infine che tale derivata si annulli, si trova che il filtro di Wiener che minimizza l'errore quadratico medio nel dominio della frequenza è chiaramente caratterizzato da [18]:

$$W(\omega) = \frac{S_{XY}(\omega)}{S_{YY}(\omega)} . \quad (2.32)$$

Rumore additivo. Si consideri un segnale $x(m)$ sovrapposto ad un rumore additivo $n(m)$, in formule

$$y(m) = x(m) + n(m) , \quad (2.33)$$

e si effettui l'assunzione che segnale e rumore siano non correlati, cioè che la cross-correlazione tra segnale e rumore sia tale che $C_{xn}(m) = 0$. Sotto questa ipotesi, consegue che la matrice di autocorrelazione del segnale rumoroso sia semplicemente la somma delle matrici di autocorrelazione del segnale e del rumore⁹,

$$\mathbf{C}_{yy} = \mathbf{C}_{xx} + \mathbf{C}_{nn} , \quad (2.34)$$

⁸Risultato identico si ottiene derivando rispetto a $W(\omega)$, a costo di qualche passaggio in più nel calcolo.

⁹Si osservi che – in linea generale – l'autocorrelazione del rumore può essere una matrice, ma quasi sempre è descritta semplicemente tramite la sua varianza.

ed inoltre la cross-correlazione tra il segnale rumoroso ed il segnale senza rumore sia

$$\mathbf{C}_{xy} = \mathbf{C}_{xx} . \quad (2.35)$$

Facendo uso delle Eq. (2.34) e (2.35) all'interno dell'Eq. (2.25), si giunge all'espressione:

$$\mathbf{w} = (\mathbf{C}_{xx} + \mathbf{C}_{nn})^{-1} \mathbf{C}_{xx} . \quad (2.36)$$

In maniera del tutto analoga, nel dominio della frequenza si ha che

$$Y(\omega) = X(\omega) + N(\omega) . \quad (2.37)$$

Questa scrittura, con identica procedura, porta a riscrivere l'Eq. (2.32) come [18]

$$W(f) = \frac{S_{XX}(\omega)}{S_{XX}(\omega) + S_{NN}(\omega)} , \quad (2.38)$$

che – dividendo sia numeratore che denominatore per $S_{NN}(\omega)$ e ricordando che $S_{XX}(\omega)/S_{NN}(\omega) \equiv \text{SNR}(\omega)$ – può essere ancora riscritta nella conveniente forma [18]:

$$W(\omega) = \frac{\text{SNR}(\omega)}{\text{SNR}(\omega) + 1} . \quad (2.39)$$

Quindi, per un rumore additivo, il filtro di Wiener attenua ogni componente frequenza in moto proporzionale alla stima del rapporto segnale-rumore.

2.3.2 Modello per il rumore newtoniano

L'ottimizzazione di array sismici rispetto alla sottrazione del NN è dettagliatamente discussa nella referenza [19]: gli autori hanno effettuato il calcolo analitico dei residui del filtro di Wiener, esplicitando i termini di “correlazione” tra il segnale \mathcal{S} (restituito dai sismometri) ed il segnale N sullo specchio (misurato dall'interferometro), nonché i termini di “correlazione” tra i differenti sismometri in funzione delle loro posizioni.

Nel dominio delle frequenze, definita $\epsilon(\omega)$ l'efficienza di sottrazione del NN, si ottiene il risultato [19]:

$$1 - \epsilon(\omega) = \sqrt{\frac{S_{Y_{\text{sub}}}(\omega)}{S_Y(\omega)}} = \sqrt{1 - \frac{\mathbf{S}_{\mathcal{S}N}^\dagger(\omega) \mathbf{S}_{\mathcal{S}\mathcal{S}}^{-1}(\omega) \mathbf{S}_{\mathcal{S}N}(\omega)}{S_{NN}(\omega)}} , \quad (2.40)$$

dove $S_Y(\omega)$ e $S_{Y_{\text{sub}}}(\omega)$ sono le densità spettrali di potenza del NN contenute rispettivamente prima e dopo la sottrazione nel segnale dell'interferometro.

L'Eq. (2.40) può anche essere riletta reinterpretando le densità spettrali e le densità spettrali incrociate come (auto-)correlazioni e cross-correlazioni; in quest'ottica, elevando anche al quadrato, si può scrivere la forma equivalente¹⁰ [20]:

$$R = 1 - \frac{\mathbf{C}_{\mathcal{S}N}^T \mathbf{C}_{\mathcal{S}\mathcal{S}}^{-1} \mathbf{C}_{\mathcal{S}N}}{C_{NN}} , \quad (2.41)$$

dove:

¹⁰L'operazione \dagger di hermitiano coniugato è stata sostituita dall'operazione T di trasposizione, in quanto i segnali in questione sono reali.

- ② R indica il residuo della sottrazione del filtro,
- ② C_{SN} è il vettore di cross-correlazione tra i sismometri e la forza agente sulla massa di test,
- ② C_{SS} è la matrice di cross-correlazione tra i sismometri,
- ② e C_{NN} la varianza del NN.

L'Eq. (2.41) ci porta alla conclusione che – per ottenere una buona efficienza di sottrazione, o equivalentemente un residuo $R \rightarrow 0$ – sia necessario rispettare le seguenti condizioni:

- ② in primo luogo, ogni sensore deve essere massimamente correlato con il NN, in modo da rendere i termini di C_{SN} il più grande possibile;
- ② inoltre l'accoppiamento tra le quantità misurate dai vari sensori, cioè il contenuto di C_{SS} , deve essere quanto più piccolo possibile.

2.4 Ottimizzazione array di sensori

I punti appena descritti sono pertanto la base sulla quale viene costruita l'ideale infrastruttura per il posizionamento dei sensori sismici:

1. dovranno essere costruite le mappe di correlazione tra lo spostamento dei sensori e la forza newtoniana sulla massa di test, e quelle tra sensore e sensore;
2. bisogna cercare le zone di massima correlazione tra sensori e NN, e contemporaneamente le posizioni di minimo accoppiamento tra sensore e sensore.

Si osservi che questo procedimento è stato qui basato sulla trattazione del filtro di Wiener, ma le conclusioni cui si giunge sono generali per ogni metodo di mitigazione del rumore: pertanto le considerazioni appena effettuate sulle mappe sono in generale valide.

Primo sensore. In virtù di quanto affermato, per quanto riguarda il posizionamento del primo sensore, è sufficiente ricercare nella mappa di correlazione tra spostamento dei sensori e forza newtoniana sulla massa di test le zone di massimo e minimo assoluto¹¹: trovate queste, se ne sceglie una (se ve ne sono più di una) e vi si posiziona il primo sensore.

Secondo sensore. In relazione al secondo sensore, la procedura richiede:

- ② di considerare, nella già citata mappa tra spostamento dei sensori e forza newtoniana, gli altri punti di massimo;
- ② una volta costruita la mappa tra gli spostamenti relativi al primo sensore ed un altro, di cercare le zone di minima correlazione¹²;

¹¹In generale, vanno ricercate le zone di massimo modulo nella mappa di correlazione.

¹²Si osservi che si sta parlando delle zone che presentano correlazione minima (cioè modulo della correlazione il più possibile vicino allo 0, non di valore della correlazione tendente a -1 (che indica invece massima anticorrelazione)).

- ☯ infine, di posizionare il secondo sensore in una zona che quindi massimizzi la correlazione tra spostamento e forza, e – contemporaneamente – minimizzi la correlazione tra primo e secondo sensore.

Sensori successivi. Per quanto riguarda i sensori successivi al secondo, invece, la procedura da seguire è una sorta di iterazione:

- ☯ si devono prendere in esame, nella già citata mappa tra spostamento dei sensori e forza newtoniana, i punti di massimo non ancora “utilizzati”;
- ☯ una volta costruite le N mappe tra lo spostamento relativo a ciascuno degli N sensori già posizionati e quello del sensore da posizionare, si cercano le zone di minima correlazione;
- ☯ infine, si cercano le zone che massimizzino la correlazione tra spostamento e forza, e – contemporaneamente – minimizzino tutte la correlazione tra i sensori già posizionati e quello in questione.

Mappe. Nei capitoli che seguono, tutte le mappe riportate sono relative solamente alla correlazione tra lo spostamento del primo sensore e la forza newtoniana sulla massa di test: la procedura di costruzione delle mappe risulta comunque generale e si può facilmente estendere a tutte le altre.

CAPITOLO 3

MODI NORMALI

Come evidente dalle formule relative al filtro di Wiener descritte nella Sottosez. 2.3.1, le quantità rilevanti per la mitigazione del rumore newtoniano sono i coefficienti di correlazione. Come già descritto nel capitolo precedente, per il calcolo di questi coefficienti è necessario conoscere lo spostamento $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ di tutti i punti del terreno e la corrispondente forza newtoniana $\mathbf{F}(t) = [F^x(t), F^y(t), F^z(t)]$ agente sulla massa di test. Come chiarito in App. A.2.1, è possibile calcolare la correlazione tra componenti di quantità vettoriali, che nel nostro caso si esplicita come:

$$C_{uF}^{(ij)}(\mathbf{r}) = \frac{\mathbb{E}[u^i(\mathbf{r}, t)F^j(t)]}{\sigma_{u^i}\sigma_{F^j}} = \frac{1}{\sigma_{u^i}\sigma_{F^j}} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} u^i(\mathbf{r}, t)F^j(t) dt. \quad (3.1)$$

Risulta chiaro che per valutare lo spostamento $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ dovuto al campo sismico sono determinanti la conoscenza della distribuzione delle sorgenti sismiche e dello spettro del campo stesso. Non disponendo di queste informazioni, in quanto variabili a seconda del caso in questione e non determinabili a priori, vorremmo essere in grado di utilizzare un metodo alternativo – indiretto – per il calcolo della correlazione. Ci chiediamo quindi se sia possibile ottenere la medesima informazione sulla forza newtoniana data dall'Eq. (3.1) senza essere a conoscenza dello spettro del rumore sismico e delle sue condizioni al contorno. Nelle sezioni di seguito verrà definito il metodo con il quale si è scelto di procedere, il quale si basa sulla decomposizione della soluzione in modi normali.

3.1 Modi normali: caratteristiche e prospettive d'uso

Piccoli spostamenti e linearizzazione delle equazioni. Quando un sistema possiede una configurazione di equilibrio (stabile), è possibile studiarne il moto in un intorno di questa, ricorrendo alla teoria dei modi normali di oscillazione (teoria che poggia sul cosiddetto *principio di sovrapposizione*).

Tale decomposizione, ponendo le proprie basi sulla linearizzazione delle equazioni (cioè limitandosi a considerare il primo ordine “perturbativo”), risulta in ottimo accordo

con la soluzione esatta ogniqualvolta gli spostamenti in questione siano di piccola entità: nel caso in esame¹, tale condizione è ampiamente rispettata.

Breve richiamo teorico. L'uso di questo metodo richiede la scrittura delle soluzioni per lo spostamento (nel nostro caso, sismico) $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ dalla configurazione di equilibrio nella forma

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n(t) \mathbf{m}_n(\mathbf{r}), \quad (3.2)$$

laddove:

- ☉ i coefficienti scalari² $A_n(t)$ rappresentano ciascuno l'ampiezza del modo n -esimo, in generale dipendente dal tempo e di forma sinusoidale (come noto dalla teoria, a partire dalla soluzione dell'equazione secolare con autovalori strettamente positivi);
- ☉ ogni coefficiente $A_n(t)$ di forma sinusoidale possiede una caratteristica pulsazione ω_n , detta *pulsazione propria*³ o *normale*;
- ☉ i vettori $\mathbf{m}_n(\mathbf{r})$ sono gli autovettori (indipendenti) relativi allo spostamento (qui sismico), ciascuno in associazione ad una delle pulsazioni ω_n .

In formule, le ampiezze (in funzione del tempo) possono essere quindi formalmente scritte come:

$$A_n(t) = a_n \cos(\omega_n t + \phi_n), \quad (3.3)$$

dove a_n è un coefficiente che determina il peso del modo in questione e ϕ_n una fase arbitraria. Gli autovettori, per richiesta di indipendenza, devono invece sottostare a

$$\langle \mathbf{m}_n(\mathbf{r}), \mathbf{m}_m(\mathbf{r}) \rangle \propto \delta_{nm}, \quad (3.4)$$

la quale a causa dell'arbitrarietà dei coefficienti a_n (che quindi possono essere riscaldati) viene spesso scritta nella forma più stringente

$$\langle \mathbf{m}_n(\mathbf{r}), \mathbf{m}_m(\mathbf{r}) \rangle = \delta_{nm}, \quad (3.5)$$

la quale ne garantisce anche la normalizzazione (oltre all'indipendenza).

Significato dei modi normali. La decomposizione in Eq. (3.2) può quindi essere parzialmente esplicitata nella forma

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(\omega_n t + \phi_n) \mathbf{m}_n(\mathbf{r}) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \mathbf{m}_n(\mathbf{r}, t), \quad (3.6)$$

¹Si parla, ovviamente, di sollecitazioni sismiche dovute ad un background di fondo, quindi di piccola intensità (in quanto sollecitazioni come terremoti, oltre a non essere piccole, spesso portano anche a deformazioni irreversibili).

²Nella forma più generale, i coefficienti temporali potrebbero essere rappresentati da vettori, cioè $A_n^{(d)}(t)$ dove $d \in \{x, y, z\}$: questo espediente verrà utilizzato nella ortogonalizzazione dei modi (in proposito, si veda la Sottosez. 7.2.2).

³Spesso si fa – impropriamente – uso della denominazione *frequenza propria* o *autofrequenza*, ormai di uso comune benché non formalmente corretta.

dalla quale è evidente il significato di peso che assume ciascun coefficiente a_n . Nell'ultima eguaglianza presente in Eq. (3.6), si è solamente effettuata la semplice identificazione⁴

$$\mathbf{m}_n(\mathbf{r}, t) = \cos(\omega_n t + \phi_n) \mathbf{m}_n(\mathbf{r}), \quad (3.7)$$

la quale – però – esplicita chiaramente il significato del procedimento messo in atto: ogni singolo vettore $\mathbf{m}_n(\mathbf{r}, t)$ (a meno del peso a_n corrispondente) è noto come *modo normale di oscillazione* e descrive una soluzione del sistema completamente indipendente da tutte le altre.

Proprietà da tenere bene a mente per il seguito della trattazione sono le seguenti:

- ☉ un sistema in moto su un suo singolo modo normale **non** può mai sollecitare un altro modo normale, in virtù della loro reciproca indipendenza;
- ☉ è possibile descrivere un sistema nelle cosiddette *coordinate normali*, che costituiscono un sistema costruito in modo tale da far sì che ogni singolo modo normale solleciti solamente una delle coordinate di tale sistema;
- ☉ negli altri sistemi di coordinate (non in quello delle coordinate normali), la sollecitazione anche di un singolo modo normale produce un'oscillazione – in generale – di tutte le coordinate, e questa è la ragione per cui è usuale dire che un modo normale descrive un moto *collettivo* del sistema.

3.1.1 Mappe di correlazione con modi normali

Modi normali e mappe. La domanda cui ora bisognerebbe rispondere risulta quindi la seguente: «è possibile ricavare la mappa di correlazione contenente le posizioni ottimali⁵ nelle quali disporre i sensori sismici senza aver determinato delle soluzioni temporali per il campo sismico?».

Nel caso in cui la risposta finale sia affermativa, il procedimento di decomposizione sui modi normali ci eviterebbe la determinazione e l'uso di soluzioni nel dominio del tempo, evitando il problema esplicitato all'inizio del capitolo presente. Da un punto di vista pratico, la questione si ridurrebbe alla validazione del metodo di decomposizione su modi normali tramite confronto con la soluzione temporale: nelle sezioni seguenti cercheremo appunto di dare una descrizione del processo di validazione, con particolare attenzione a determinare eventuali limitazioni di cui tenere conto.

Moto collettivo e forza newtoniana. In realtà, per poter procedere in questa direzione, non si hanno abbastanza informazioni sulle proprietà della forza newtoniana sulla massa di test: l'idea addizionale sulla quale ci baseremo è che ad ogni modo di vibrazione – essendo questo un moto collettivo del sistema, nel senso già esplicitato – corrisponda un ben determinato valore della forza newtoniana, che può essere calcolato indipendentemente da qualsiasi soluzione nel dominio del tempo. Tale corrispondenza

⁴Vi è un leggero abuso di notazione relativamente ad \mathbf{m}_n , ma questo è accettabile in quanto non ingenera confusione, dal momento che la differenza tra le due scritture è opportunamente messa in evidenza dalla diversa dipendenza dalle variabili spazio-temporali.

⁵Di seguito ci occuperemo di ricavare la mappa di correlazione relativa al posizionamento del primo sensore: come sarà chiarito nella Sez. 2.4 per trovare le posizioni ottimali dei sensori successivi si dovrà utilizzare una sorta di metodo iterativo.

è espressa nella forma⁶:

$$\mathbf{m}_n^i(\mathbf{r}, t) \longleftrightarrow F_n^j, \quad i, j = 1, 2, 3; \quad (3.8)$$

Sotto l'ipotesi di piccole oscillazioni, questa congettura fa sì che la forza newtoniana – nello specifico ogni sua componente $F_n^j(t)$, associata al modo n -imo di vibrazione – abbia, quantomeno al prim'ordine⁷, lo stesso tipo di andamento temporale del singolo modo in Eq. (3.7):

$$F_n^j(t) \simeq f_n^j \cos(\omega_n t + \phi_n); \quad (3.9)$$

la corrispondenza può quindi essere espressa anche come

$$\mathbf{m}_n^i(\mathbf{r}) \longleftrightarrow f_n^j, \quad i, j = 1, 2, 3, \quad (3.10)$$

nella quale è evidente la “perdita” della dipendenza temporale, la cui ragione apparirà più chiara nella Sez. 3.2.

3.1.2 Un dettaglio sul setup degli specchi

Per poter procedere senza perdere il legame con l'esperimento stesso, bisogna in primo luogo osservare quale sia il setup sperimentale di sospensione degli specchi, in Fig. 3.1

Appare evidente come la sospensione avvenga sull'asse verticale, fatto che implica che la componente della forza newtoniana sullo specchio in tale direzione risulti pressoché ininfluenza: il sistema di sospensione è costruito in maniera tale da non permettere uno spostamento lungo \hat{z} .

Diversa, ma con conseguenze analoghe, la situazione lungo la direzione orizzontale del piano contenente lo specchio, detta \hat{x} : l'effetto indotto sullo specchio è in direzione trasversa rispetto alla direzione del fascio, quindi di rilevanza marginale sull'interferometro.

In definitiva, appare quindi chiaro che la componente rilevante della forza newtoniana sia quella lungo la direzione \hat{y} del fascio stesso; con riferimento all'Eq. (3.1), quindi ci possiamo limitare a $j = 2$ ⁸.

Semplice modello 2D. Per dare una prima applicazione alle ipotesi succitate, possiamo considerare una sezione verticale contenente lo specchio (massa di test)

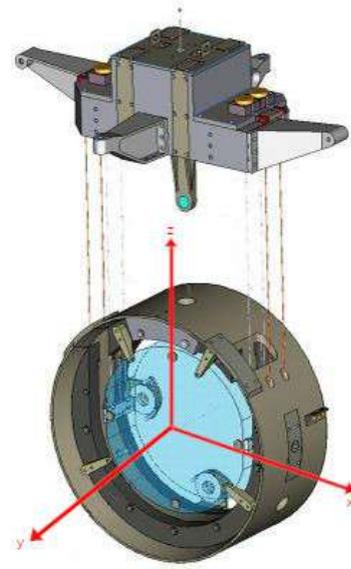


Figura 3.1 – Setup sperimentale della sospensione dello specchio.

⁶La corrispondenza potrebbe anche essere scritta come $\mathbf{m}_n(\mathbf{r}, t) \longleftrightarrow \mathbf{F}_n$, formalmente ineccepibile ma fuorviante, in quanto potrebbe indurre il lettore a pensare ad una corrispondenza in componenti del tipo: $\mathbf{m}_n^i(\mathbf{r}, t) \longleftrightarrow F_n^i$, cioè tale che ad ogni componente di un modo sia “associata” la corrispondente componente della forza; in realtà ogni componente di un modo influenza *tutte* le componenti della forza newtoniana.

⁷In generale, questo non è vero, perché non è detto che sia le fasi ϕ_n che i coefficienti a_n siano esattamente gli stessi che compaiono nella decomposizione dello spostamento $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$; ma – limitatamente al prim'ordine e sotto l'ipotesi di piccoli spostamenti – questa risulta un'assunzione ragionevole.

⁸Fisseremo $j = 2$ tanto nella descrizione del semplice modello 2D, quanto in quella del caso 3D.

ed il terreno (descritto con una corda massiva, come fosse solo la parte superficiale). Nella Sez. 3.2 che segue, si trovano i dettagli del calcolo in questa particolare schematizzazione.

3.2 Modello 2D: “terreno” come corda massiva 1D

Per testare la fattibilità di questo metodo, procediamo con un semplice esempio bidimensionale completo di soluzione analitica.

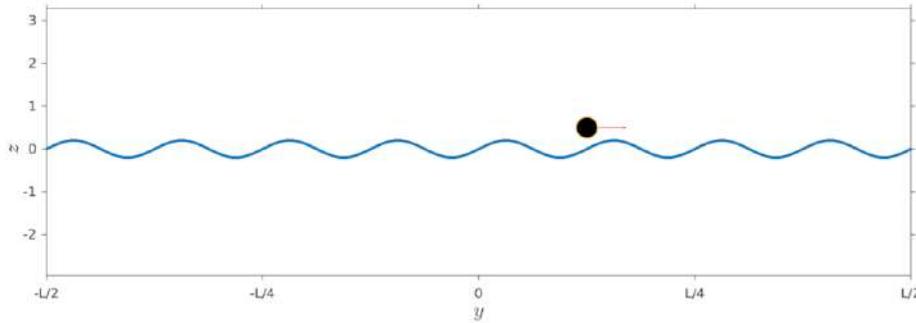


Figura 3.2 – Corda unidimensionale massiva fissata agli estremi in $\pm L/2$, i cui effetti sono analizzati nel punto di coordinate (y_0, z_0) , rappresentativo della posizione della massa di test. La freccia rossa rappresenta la forza newtoniana lungo \hat{y} ⁹.

Schematizziamo il terreno come una corda massiva 1D di lunghezza L fissata agli estremi in $\pm L/2$, e prendiamo in considerazione un punto – rappresentante la massa di test – di coordinate (y_0, z_0) generiche, come mostrato in Fig. 3.2.

Piccole oscillazioni. In questo semplice modello, i modi normali di vibrazione possono essere esplicitati nella forma:

$$\mathbf{m}_n(y, t) = \mathbf{m}_n(y) \cos(\omega_n t + \phi_n) = B_n \sin \left[\frac{\pi n}{L} \left(y - \frac{L}{2} \right) \right] \cos(\omega_n t + \phi_n), \quad (3.11)$$

dove ϕ_n rappresentano le fasi relative ad ogni modo e B_n le costanti di normalizzazione degli autovettori da scegliere opportunamente di modo che valga la condizione di ortonormalità $\langle \mathbf{m}_n(y), \mathbf{m}_m(y) \rangle = \delta_{nm}$.

Sotto l’ipotesi di piccole oscillazioni, l’idea che ad ogni modo normale corrisponda un ben determinato valore della forza newtoniana (si veda la Sottosez. 3.1.1) fa sì che la forza newtoniana¹⁰ associata al modo n -esimo di vibrazione ed agente sulla massa di test posizionata in (y_0, z_0) abbia, quantomeno al prim’ordine, lo stesso tipo di andamento temporale del singolo modo in Eq. (3.11):

$$F_n(t) \simeq f_n \cos(\omega_n t + \phi_n). \quad (3.12)$$

⁹Si tenga presente del fatto che tanto l’ampiezza delle oscillazioni della corda quanto l’intensità della forza risultino non in scala nel grafico, per ragioni di visualizzazione.

¹⁰Si sta considerando la componente lungo il fascio della forza newtoniana $\mathbf{F}(t)$ che, in questo particolare caso 2D, corrisponde ad $F_n^y(t) = F_n^z(t)$, e viene – per semplicità notazionale – indicata semplicemente con $F_n(t)$.

Principio di sovrapposizione. Il principio di sovrapposizione ci permette di descrivere lo spostamento verticale di un generico punto sulla corda in termini dei modi in Eq. (3.11), nella forma

$$u(y, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \mathbf{m}_n(y, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \mathbf{m}_n(y) \cos(\omega_n t + \phi_n). \quad (3.13)$$

In maniera totalmente analoga – fatta salva l’ipotesi di piccoli oscillazioni e limitandosi ai contributi al prim’ordine –, possiamo descrivere la forza newtoniana complessiva come

$$F(t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n F_n(t) \simeq \sum_{n=1}^{\infty} a_n f_n \cos(\omega_n t + \phi_n). \quad (3.14)$$

Si osservi come il ϕ_n utilizzato nell’espressione della forza sia il medesimo che compare negli spostamenti in Eq. (3.13): questo (in una trattazione rigorosa) non sarebbe esatto, ma – siccome il segnale si propaga a velocità c , e dato che la scala di lunghezze in gioco è piccola (dell’ordine dei m) – la differenza di fase che scaturirebbe risulta ininfluente. Con lo stesso ragionamento, e fatta salva l’ipotesi che ad un modo normale sia associata una ben specifica forza newtoniana (quindi anche proporzionale in ampiezza), anche i coefficienti a_n posti nello sviluppo della forza in Eq. (3.14) risultano – almeno in prima approssimazione – essere gli stessi utilizzati per lo spostamento in Eq. (3.13).

Il confronto tra le Eq. (3.13) e (3.14) ben evidenzia la corrispondenza tra modi normali e componenti della forza newtoniana, anche depauperate della dipendenza temporale (che è appunto uguale), come era stato stigmatizzato in Eq. (3.10).

Correlazione e media pesata. Facendo uso dalle Eq. (3.13) e (3.14), la correlazione tra lo spostamento $u(y, t)$ e la forza newtoniana $F(t)$ ¹¹ risulta essere espressa da

$$C_{uF}(y) = \frac{1}{\sigma_u \sigma_F} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} u(y, t) F(t) dt \simeq \frac{1}{2\sigma_u \sigma_F} \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 f_n \mathbf{m}_n(y), \quad (3.15)$$

dove si sono indicate con σ_u e σ_F le deviazioni standard dello spostamento $u(y, t)$ e della forza newtoniana $F(t)$.

Risulta chiaro dall’Eq. (3.15) come la correlazione dipenda sia dai coefficienti a_n che pesano la decomposizione dello spostamento sui modi di vibrazione, sia dai coefficienti f_n che modulano i contributi della forza newtoniana associati ad ogni modo: questo permette di tenere conto, nella sovrapposizione dei modi, del loro effettivo contributo alla forza F . In linea di principio, quindi, conoscendo sia i modi $\mathbf{m}_n(y)$ sia il loro contributo alla forza newtoniana, rimarrebbe da determinare la struttura dei coefficienti a_n : una volta compresa, sarebbe possibile scrivere la correlazione cercata senza necessitare di alcuna soluzione temporale.

L’informazione sui punti massimamente correlati con la forza newtoniana che ricerchiamo, oltre ad esser contenuta nell’Eq. (3.15), supponiamo possa anche essere ottenuta tramite l’uso di una media pesata $S_{\mathbf{m}F}(x)$ comprensiva di tutti i modi della simulazione:

$$S_{\mathbf{m}F}(y) = \sum_n w_n \frac{f_n}{\sigma_F} \mathbf{m}_n(y), \quad (3.16)$$

¹¹La componente lungo il fascio della forza newtoniana $\mathbf{F}(t)$, in questo particolare caso 2D, corrisponde ad $F^y(t) = F^2(t)$, ed è – per comodità notazionale – indicata semplicemente con $F(t)$.

dove appunto le forze newtoniane “normalizzate” $\frac{f_n}{\sigma_F}$ ¹² rappresentano dei pesi utilizzati nella media. Chiaramente, per fare in modo che la media pesata in Eq. (3.16) dia informazione equivalente alla correlazione in Eq. (3.15), si deve imporre quantomeno¹³

$$S_{mF}(y) \propto C_{uF}(y) , \quad (3.17)$$

e scegliendo conseguentemente – ad esempio – i pesi nella forma

$$w_n = a_n^2 . \quad (3.18)$$

Dunque, fossimo a conoscenza dei coefficienti a_n presenti in Eq. (3.13) – coefficienti dentro i quali è racchiuso il contenuto fisico del rumore che vorremmo conoscere –, i pesi w_n della media $S_{mF}(y)$ verrebbero opportunamente “tunati” per generare l’equivalenza richiesta (a meno di un inessenziale “re-scaling” dovuto al coefficiente $1/(2\sigma_u)$ presente nella formula della correlazione).

Per constatare l’equivalenza dei due metodi, vorremmo graficare le quantità in questione (correlazione e media pesata) in un caso semplice, scegliendo i coefficienti $a_n = 1$, con conseguente selezione dei pesi $w_n = 1$. Per fare questo dal punto di vista computazionale (il quale implica, ovviamente, un numero *finito* di modi), dobbiamo assicurarci di poter troncare la serie ad un N finito, in modo tale che la somma dei termini mancanti abbia un contributo tendente a zero. Questo è garantito dal grafico in Fig. 3.3 riportato di seguito, in cui si è analizzato l’andamento dei coefficienti f_n della forza newtoniana associata a ciascun modo, in funzione della lunghezza d’onda spaziale λ dei modi vibrazionali della corda (divisa per la distanza verticale z_0 della massa di test dalla corda nella configurazione di equilibrio). Risulta evidente come

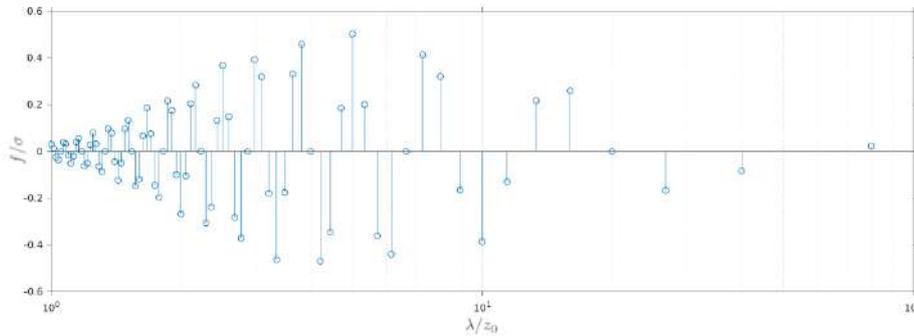


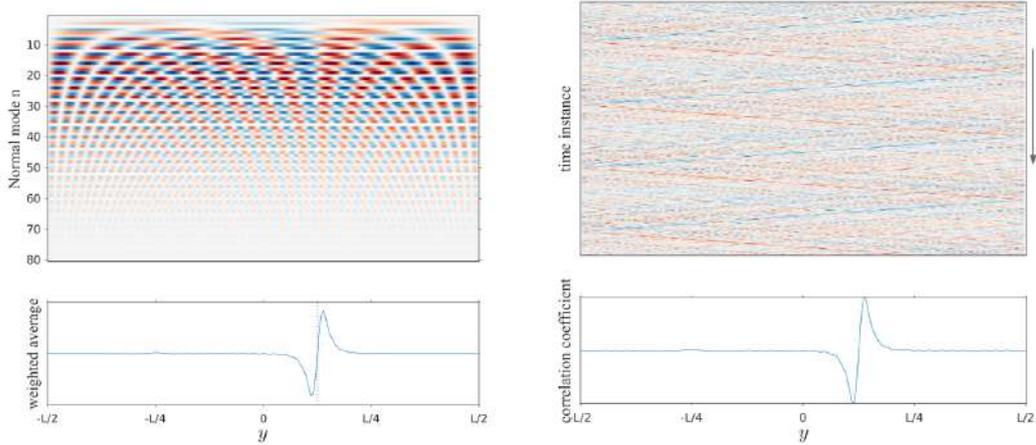
Figura 3.3 – Contributo dei vari modi di oscillazione alla forza newtoniana al variare della lunghezza d’onda spaziale λ dei modi della corda (in unità di z_0 , distanza della posizione di equilibrio della massa di test dalla corda): si nota un massimo in corrispondenza di $\lambda/z_0 \approx 5$.

alcuni dei modi abbiano maggiore rilevanza di altri: in particolare, quelli che offrono il maggior contributo sono quelli aventi $\lambda \approx 5z_0$. Si osservi inoltre che, allontanandosi dal valore massimo, i contributi decrescono sempre di più¹⁴.

Facciamo quindi ora riferimento alla Fig. 3.4 per verificare l’equivalenza tra la media pesata in Eq. (3.16) e la correlazione in Eq. (3.15). L’immagine superiore in Fig. 3.4a riproduce ciascun modo normale ($n = 1, \dots, 80$) di vibrazione della corda – le zone blu

¹²Per “normalizzata” si intende la componente n -esima della forza divisa per la sua deviazione standard, cioè: f_n/σ_F .

¹³Si potrebbe anche imporre una condizione più forte, nella forma $S_{mF}(y) = C_{uF}(y)$, che darebbe



(a) Nella figura superiore, ogni riga rappresenta un modo di oscillazione della corda (le linee bianche rappresentano modi aventi contributo nullo); in quella inferiore, media pesata $S_{mF}(y)$ di tutti i modi.

(b) Nella figura superiore, spostamento verticale della corda prodotto dalla somma di modi pesati con $a_n \propto 1$ considerando i coefficienti unitari a vari istanti di tempo t (il tempo aumenta verso il basso); in quella inferiore, correlazione tra lo spostamento e la forza newtoniana.

Figura 3.4 – Confronto tra la media pesata di modi normali $w_n(y)$ e la correlazione tra la forza newtoniana e lo spostamento ottenuto tramite somma di modi normali (avendo assunto $a_n \propto 1$ e $\phi_n = \text{cost}$). Sull’asse delle ascisse è sempre presente la coordinata y lungo la direzione della corda (quindi estesa da $-L/2$ a $+L/2$). In entrambe le figure superiori viene riportato lo spostamento verticale (zone blu indicano spostamento negativo, rosse spostamento positivo).

indicano le “valli”, le zone rosse indicano le “colline” e le linee bianche rappresentano modi a contributo nullo. Invece, nella parte inferiore della Fig. 3.4a, viene riportata la media pesata $S_{mF}(y)$ di tutti i modi appena descritti, modulati secondo pesi $\frac{f_n}{\sigma_F}$ esplicitati nella nota a piè di pagina precedente.

Simile nell’aspetto ma molto diversa nel contenuto, la Fig. 3.4b: nella parte superiore viene raffigurato l’equivalente di circa 1000 istanze temporali dell’oscillazione della corda (anche qui le zone blu rappresentano le “valli”, mentre quelle rosse i “picchi”) che vogliono “mimare” l’andamento temporale della soluzione: questa viene creata tramite una sovrapposizione dei modi in Eq. (3.13), i quali vibrano ognuno alla propria autofrequenza, caratterizzati da coefficienti a_n unitari ed una fase relativa ϕ_n casuale (ma costante nel tempo). Sempre riferendoci alla medesima figura, nella parte inferiore troviamo la correlazione calcolata tra lo spostamento ottenuto tramite la somma appena descritta e la forza newtoniana (calcolata analiticamente).

Come chiaramente prevedibile (essendo nel caso 1D), dai due grafici inferiori in Fig. 3.4, la media pesata $S_{mF}(y)$ tramite i coefficienti $\frac{f_n}{\sigma_F}$ risulta perfettamente sovrappo-

luogo a $w_n = a_n^2/(2\sigma_u)$, non dando luogo al re-scaling citato, il quale risulta però del tutto insignificante ai fini della trattazione.

¹⁴Infatti, come atteso in generale, all’aumentare della lunghezza d’onda il gradiente del campo che viene visto nella regione di interesse (in questo caso dalla massa di test) tende ad annullarsi, così come a piccole λ (per effetto dell’alta frequenza della sollecitazione) tale contributo viene mediato, anche in questo caso con conseguente riduzione dell’effetto complessivo.

ponibile alla correlazione con la forza newtoniana in funzione del tempo: questo ci rende ottimisti sull'equivalenza tra le simulazioni temporali e le simulazioni modali almeno nel caso unidimensionale.

Sempre con riferimento ai due grafici inferiori in Fig. 3.4, si può osservare che le posizioni che forniscono i contributi più rilevanti – ovvero quelle che correlano massimamente con la forza newtoniana – sono simmetricamente disposte rispetto al punto di analisi y_0 ¹⁵: queste sarebbero le zone nelle quali andrebbe idealmente collocato il primo sensore sismico per la cancellazione ottimale del SNN.

In un ipotetico sistema 3D, tuttavia, tutti i modi impartirebbero contributi da pesare opportunamente e la posizione ottimale per i sensori emergerebbe solo da una analisi statistica completa sull'intero set dei modi stessi.

3.3 Condizioni di equivalenza: caso 3D

La soluzione 1D precedentemente esposta, relativamente alla correlazione con la forza newtoniana, è ben descritta dalla sovrapposizione di modi vibrazionali del sistema pesati da coefficienti che racchiudono l'informazione sulla forza stessa, a patto di scegliere i pesi secondo l'Eq. (3.18).

Si vorrebbe mantenere questa corrispondenza anche nel caso 3D, cioè determinare se esistano delle condizioni affinché essa sia valida; questo non è però sufficiente per un semplice motivo: le condizioni matematicamente determinate per la validità dell'equivalenza potrebbero essere troppo restrittive per descrivere un campo sismico.

Dobbiamo quindi determinare

- ☑ quali siano i vincoli cui si debba sottostare,
- ☑ e contemporaneamente valutare se tali vincoli siano compatibili con la fisica da descrivere.

Al fine di comprendere meglio se vi siano particolari condizioni alle quali devono sottostare i coefficienti $A_n(t)$ affinché si possa fare uso della decomposizione mediante modi normali anziché delle simulazioni temporali, riportiamo di seguito la trattazione teorica corrispondente.

Confronto. Sia $\mathbf{F}(t) = [F^x(t), F^y(t), F^z(t)]$ la generica forza newtoniana agente sulla massa di test della quale considereremo solo la componente lungo il fascio, $F(t) = F^y(t)$ ¹⁶. Come già descritto all'inizio del presente capitolo, la relazione¹⁷ che determina la correlazione tra la forza newtoniana e lo spostamento generico $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ è descritta in Eq. (3.1).

Per semplicità consideriamo i coefficienti come quantità scalari, di modo che lo spostamento possa quindi essere espresso come

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n(t) \mathbf{m}_n(\mathbf{r}) = \langle \mathbf{u}(\mathbf{r}) \rangle_t + \sum_{n=1}^{\infty} A_n(t) \mathbf{m}_n(\mathbf{r}), \quad (3.19)$$

¹⁵Si faccia attenzione al fatto che i picchi riportati nella Fig. 3.4b inferiore indicano una massima correlazione, indipendentemente dal segno associato al massimo del picco stesso.

¹⁶Per ora, manterremo la notazione con anche l'indice j libero al fine di rendere la trattazione del tutto generale.

¹⁷Numericamente, nell'Eq. (3.1), l'integrale nel tempo diventa una somma in cui si evidenzia la dipendenza dal numero di step temporali scelto.

$$u^i(\mathbf{r}, t) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n(t) \mathbf{m}_n^i(\mathbf{r}), \quad (3.20)$$

dove la sommatoria viene fatta partire da $n = 0$ (che corrisponde al termine $\langle \mathbf{u}(\mathbf{r}) \rangle_t$ il quale rappresenta lo spostamento mediato temporalmente) al fine di migliorare la stabilità di ricostruzione, riducendo anche il numero degli autovettori necessari.

Come osservato precedentemente, associata ad ogni modo normale vi è un ben determinato valore della forza newtoniana che corrisponde ad un moto collettivo del sistema: vi è quindi una equivalenza tra le quantità

$$\mathbf{m}_n^i(\mathbf{r}) \longleftrightarrow f_n^j, \quad i, j = 1, 2, 3; \quad (3.21)$$

limitandosi al primo ordine, quindi, vale anche la corrispondenza tra

$$A_n(t) \mathbf{m}_n^i(\mathbf{r}) \longleftrightarrow A_n(t) f_n^j, \quad i, j = 1, 2, 3. \quad (3.22)$$

A questo punto, la forza newtoniana corrispondente ad un movimento collettivo del sistema può essere riscritta come:

$$F^j(t) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n(t) f_n^j, \quad (3.23)$$

e quindi, in diretta conseguenza, la correlazione in Eq. (3.1) può essere anch'essa riscritta come segue

$$C_{uF}^{(ij)}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\sigma_{u^i} \sigma_{F^j}} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \mathbf{m}_n^i(\mathbf{r}) f_m^j \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} A_n(t) A_m(t) dt. \quad (3.24)$$

L'obbiettivo, analogamente al caso 1D, è quello di confrontare l'Eq. (3.24) appena descritta con la somma pesata dei modi normali data da

$$S_{mF}^{(ij)}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\sigma_{F^j}} \sum_{n=0}^{\infty} w_n^i \mathbf{m}_n^i(\mathbf{r}) f_n^j, \quad (3.25)$$

imponendo la condizione:

$$S_{mF}^{(ij)}(\mathbf{r}) \propto C_{uF}^{(ij)}(\mathbf{r}). \quad (3.26)$$

Occorre qui osservare che le espressioni presenti in Eq. (3.25) e (3.24) possono essere equiparate solamente nel caso in cui il valore atteso del prodotto dei due coefficienti $A_n(t)$ e $A_m(t)$ sia proporzionale all'identità:

$$\mathbb{E}[A_n(t) A_m(t)] \propto \delta_{nm}. \quad (3.27)$$

L'Eq. (3.27) riproduce la condizione di ortogonalità tra i coefficienti, e rappresenta l'unica richiesta alla quale si deve sottostare se si vuole poter descrivere il sistema tramite una decomposizione in modi normali anziché tramite una descrizione puramente temporale.

Nel caso in cui i coefficienti $A_n(t)$ siano caratterizzati inoltre da media nulla, la correlazione in Eq. (3.24) può essere riscritta nella forma semplificata

$$C_{uF}^{(ij)}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\sigma_{u^i} \sigma_{F^j}} \sum_{n=0}^{\infty} \sigma_{A_n}^2 \mathbf{m}_n^i(\mathbf{r}) f_n^j; \quad (3.28)$$

dal confronto di quest'ultima con l'Eq. (3.25) appare evidente l'identificazione dei pesi w_n^i come:

$$w_n^i = \frac{\sigma_{A_n}^2}{\sigma_{u^i}}. \quad (3.29)$$

È innegabile che, per un andamento sinusoidale dei coefficienti (chiaramente a media nulla), la relazione in Eq. (3.27) è automaticamente soddisfatta; questa, d'altronde, non è affatto l'unica scelta possibile, e si può optare per soluzioni diverse: in particolare un processo casuale gaussiano a media nulla, in cui $A_n(t) = \mathcal{N}(0, \sigma)$, rispetta effettivamente la condizione trovata. In definitiva, quindi, l'unica richiesta da soddisfare è quella di mostrare che i coefficienti ottenuti dalla decomposizione in modi normali siano ortogonali l'uno con l'altro: in tal caso, si ha l'uguaglianza diretta tra la mappa di sensitività trovata a partire dalla soluzione modale e la correlazione fatta nel tempo.

3.3.1 Software di simulazione

Al fine di verificare la corrispondenza sopra descritta, si necessita di un modello simulativo che ci permetta di calcolare:

1. le mappe di sensitività a partire dalla media pesata;
2. una soluzione temporale (o “pseudo-temporale”¹⁸) per gli spostamenti da cui ricavare direttamente le mappe di correlazione da confrontare.

Per questo motivo, abbiamo bisogno di un software di simulazione per creare il modello di test in 3D: disponiamo, in particolare, di due programmi atti allo scopo, ANSYS e COMSOL. Nel prossimo capitolo stabiliremo se ve ne sia uno con caratteristiche più adatte alla modellizzazione.

¹⁸Sarà più chiaro nel Cap. 6 cosa si intende per soluzioni “pseudo-temporali”.

CAPITOLO 4

SOFTWARE PER LE SIMULAZIONI

In questo capitolo, maggiormente tecnico, si effettuerà una comparazione tra due software potenzialmente adatti allo scopo di simulazione di modelli in 3D: ANSYS e COMSOL. Si prenderà, come riferimento, un problema (il problema di Lamb) la cui soluzione analitica è nota in letteratura, al fine di poterla confrontare con le soluzioni generate dai due programmi per modelli rappresentativi del problema in questione.

4.1 Calcolo ad elementi finiti (FE)

In generale, le equazioni che governano il moto di un sistema sono equazioni differenziali alle derivate parziali, solitamente non lineari, la cui soluzione analitica è di fatto pressoché impossibile da determinare. Siccome solitamente, nei problemi fisici reali, si possono introdurre alcune ipotesi e/o idealizzazioni che rendano il problema semplificato matematicamente non compromettendo però la bontà della soluzione, spesso si utilizzano modelli matematici idealizzati (del sistema fisico) che includano tutte le ipotesi ritenute significative per il sistema reale stesso. Una di queste tecniche consiste nel metodo degli elementi finiti (FEM), il quale permette di risolvere il problema della determinazione dello stato di sforzo e deformazione in elementi in condizioni di carico per le quali non è reperibile, o ricavabile, la soluzione analitica (per ulteriori dettagli si veda [21]). Nel FEM il dominio è visto come l'unione di tanti sotto-domini elementari: le equazioni differenziali, quindi, rimangono inalterate (su ciascun elemento finito) mentre è il dominio a venire discretizzato a seconda delle necessità del problema e delle ipotesi effettuate. In questo modo si riesce a ridurre le incognite del problema – altrimenti infinite – ad un numero finito. In sostanza, la funzione soluzione esatta, viene sostituita da una funzione approssimata di forma nota – tipicamente polinomiale – che deve coincidere con quella esatta su un certo numero di punti detti *nodi*. Nei punti interni, i valori della funzione vengono valutati sulla base del tipo di funzione approssimante scelta. Ovviamente, affinché la precisione della approssimazione sia ragionevole, si deve scegliere con accuratezza sia il grado del polinomio utilizzato (o più in generale la funzione approssimante scelta) sia la dimensione della discretizzazione del dominio, detta *mesh* più fine è quest'ultima, più l'approssimazione risulterà buona, a discapito però della richiesta di una maggiore potenza di calcolo. Si deve quindi necessariamente arrivare ad un compromesso tra questi due effetti.

4.1.1 Procedura per l'applicazione di un metodo numerico

Al fine di riprodurre risultati che non siano troppo lontani dalla soluzione esatta del problema fisico, si deve seguire uno schema operativo [22] che ci permetta di tenere sotto controllo e – se possibile – limitare diversi tipi di errori che possono portare a conclusioni sbagliate. Serve quindi una sorta di meccanismo a feedback di verifica e validazione del modello che di solito comprende i vari step riportati in Fig. 4.1.

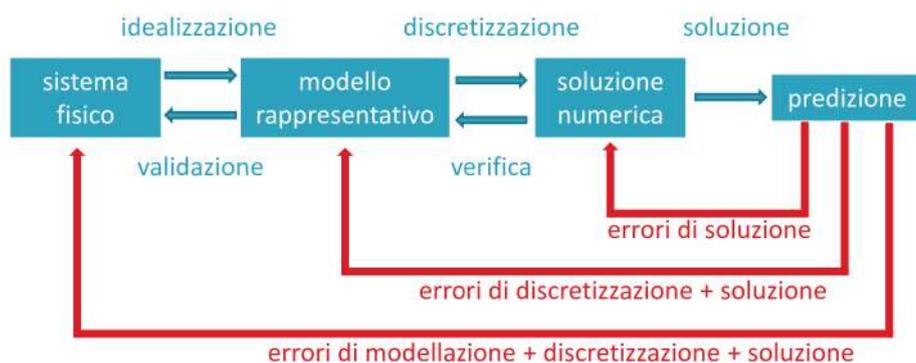


Figura 4.1 – Procedura operativa per l'applicazione di un metodo FEM a problemi fisici.

La procedura in questione consiste solitamente nei seguenti passaggi:

- ② *idealizzazione*: processo che semplifica il sistema fisico dando luogo ad un modello matematico che ne riporti le caratteristiche essenziali, di modo che i dati calcolati a partire dalle soluzioni del modello predicano i dati reali fisici in maniera attendibile;
- ② come qualsiasi processo di semplificazione, l'idealizzazione introduce un errore; è necessario quindi un processo, detto di *validazione*, che accerti l'accuratezza del modello scelto rispetto ad incertezze prefissate sfruttando il confronto con dati sperimentali noti;
- ② si procede poi con la *discretizzazione* suddividendo il dominio in sotto-domini di geometria nota (a seconda delle ipotesi effettuate) al fine di ridurre le incognite del problema ad un numero finito;
- ② durante la discretizzazione si introduce un errore pari all'errore relativo rispetto alla soluzione esatta. Anche in questo caso, deve essere effettuata una *verifica* in modo tale che questo errore risulti inferiore ad una soglia prescelta;
- ② effettuata la discretizzazione si procede alla *soluzione* numerica del problema che consta anch'essa di un errore dovuto all'approssimazione numerica considerata;
- ② nel caso in cui la soluzione numerica diverga da quella analitica, risulta evidente che la procedura effettuata non dà una buona approssimazione del sistema fisico. È d'obbligo però considerare che, anche nel caso in cui il procedimento converga, vi sia la possibilità che la soluzione trovata non sia comunque rappresentativa del modello reale.

Uno degli obiettivi prefissati è quello di determinare se sia possibile utilizzare il calcolo ad elementi finiti come buon rappresentante del campo sismico nel caso reale.

Per questo motivo si sono dapprima effettuati vari test per capire se e quale software fosse maggiormente indicato per il raggiungimento di tale scopo. Si è scelto di utilizzare come benchmark un problema ben noto in sismologia, che avesse anche una soluzione analitica da confrontare con le simulazioni prodotte dai vari software utilizzati: il problema in questione è noto come *problema di Lamb*.

4.2 Problema di Lamb

Il problema del calcolo della risposta del terreno ad una eccitazione sismica dovuta ad una sollecitazione improvvisa dello stesso, è stata teorizzata da Lamb [23] nei primi anni del ventesimo secolo. In particolare, egli analizzò il problema dovuto ad un carico puntiforme verticale od orizzontale applicato in modo improvviso sulla superficie di un semi-spazio infinito omogeneo ed elastico. Data la complessità della soluzione fornita da Lamb, diversi autori hanno ricercato soluzioni in forma più chiusa, e di più facile utilizzo, per il caso di sollecitazione puntuale: Pekeris [24] e Chao [25] fornirono le prime soluzioni complete valide però solamente in un caso particolare (in cui il rapporto di Poisson¹ $\nu = 1/4$). Nel 1979, Richards [26] prese nuovamente in considerazione questo problema e ne fornì una serie completa di soluzioni per entrambi i casi di carico (orizzontale e verticale) e per qualsiasi valore di ν . Più recentemente, in una nota tecnica [27], Kausel ha presentato un'interpretazione del problema del tutto equivalente – ma molto più semplice – attraverso una serie compatta di formule esatte in cui è possibile determinare lo spostamento verticale ed orizzontale prodotto in entrambe le situazioni di carico per $0 \leq \nu \leq 0.5$. La soluzione completa nel caso 3D si trova tramite il metodo di Cagniard-de Hoop, in cui le soluzioni del problema di Lamb sono pensate come funzioni di Green per l'equazione delle onde elastiche in un mezzo omogeneo semi-infinito, considerato come punto di partenza per lo sviluppo di sorgenti più complicate della semplice forza puntiforme. Queste soluzioni, presentate con una notazione uniforme e adatte al calcolo numerico, sono riassunte nella referenza [28]. Di seguito verrà riportata la soluzione analitica [29] del problema in questione (per maggiori dettagli sulla sua derivazione si faccia riferimento a [27]); successivamente essa verrà confrontata con un modello ad elementi finiti equivalente realizzato tramite l'uso dei due software di meccanica strutturale citati precedentemente per verificare un'equivalenza – quantomeno qualitativa – della soluzione.

Identificando con la notazione u_{ij} lo spostamento nella direzione i dovuto ad una forza – espressa come $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t; \boldsymbol{\xi}) = f_0(t)\delta(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi})\hat{e}_j$ dove $f_0(t) = \mathcal{H}(t)$ è la funzione di Heaviside – focalizzata in un punto $\boldsymbol{\xi}$ nella direzione j . La soluzione si ottiene dalla risoluzione dell'equazione:

$$4\pi\rho u_{ij}(\mathbf{x}, t) = \frac{(3\gamma_i\gamma_j - \delta_{ij})}{r^3} \int_{r/\alpha}^{r/\beta} \tau f_0(t - \tau) d\tau + \frac{\gamma_i\gamma_j}{\alpha^2 r} f_0\left(t - \frac{r}{\alpha}\right) - \frac{(\gamma_i\gamma_j - \delta_{ij})}{\beta^2 r} f_0\left(t - \frac{r}{\beta}\right), \quad (4.1)$$

dove:

¹Il *coefficiente di Poisson* ν è una grandezza adimensionale che assume un valore specifico per ogni materiale, tipicamente compresi nell'intervallo $0 \div 0.5$, la quale mette in relazione la variazione di lunghezza con quella della dimensione della sezione del materiale stesso, a seguito di deformazioni elastiche.

- ρ è la densità del mezzo;
- $r = |\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}|$ è la distanza dalla sorgente;
- $\gamma_i = \frac{x_i - \xi_i}{r}$ sono i coseni direttori del vettore;
- $\alpha = c_p = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}$ è la velocità delle onde di pressione P;
- $\beta = c_s = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$ è la velocità delle onde di taglio S;
- λ, μ sono le costanti di Lamè, utilizzate per descrivere le deformazioni elastiche.

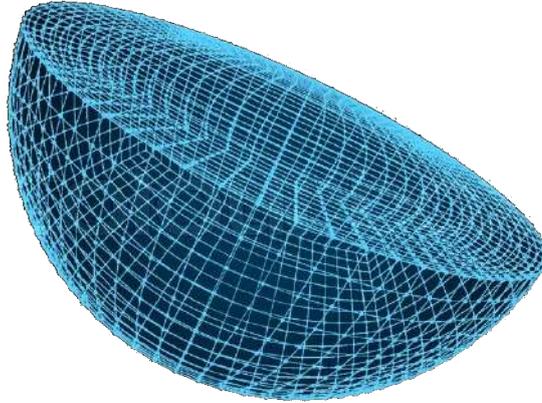


Figura 4.2 – Caso particolare di semi-spazio omogeneo infinito.

La scelta di dominio semi-infinito² viene effettuata al fine di includere nella trattazione le onde di superficie (che come spiegato precedentemente nella Sez. 2.1 rappresentano il contributo maggiormente rilevante per il rumore sismico), identificando con σ_{33} lo sforzo verticale agente sulla superficie libera.

Gli spostamenti, rispettivamente verticali ed orizzontali, $w(t)$ e $u(t)$ prodotti da tale carico nel caso specifico di $\nu = 0.25$ risultano essere:

$$w(t) = \frac{\sigma_{33}}{\pi^2 \mu r} \left(\frac{\alpha}{\beta} \right)^2 \frac{r}{\beta} \int_{-\infty}^{\tau} \frac{df}{dt} \Big|_{t=r\tau'/\beta} G(\tau - \tau') d\tau', \quad (4.2a)$$

$$u(t) = \frac{\sigma_{33}}{\pi^2 \mu r} \left(\frac{\alpha}{\beta} \right)^2 \frac{r}{\beta} \int_{-\infty}^{\tau} \frac{df}{dt} \Big|_{t=r\tau'/\beta} R(\tau - \tau') d\tau'. \quad (4.2b)$$

dove $G(\tau)$ e $R(\tau)$ sono funzioni della variabile $\tau = (\beta/r)t$. Tali soluzioni, insieme all'Eq. (4.1), stanno alla base delle simulazioni a FE che verranno descritte nel paragrafo seguente.

²Con dominio semi-infinito si intende una semisfera omogenea dotata di simmetria assiale, le cui dimensioni radiali sono grandi a sufficienza, rispetto alle lunghezze d'onda in gioco, da poter (ai fini pratici) essere considerate come se fossero infinite. La medesima assunzione viene effettuata nel caso di spazio omogeneo infinito, la cui rappresentazione è una sfera avente le stesse caratteristiche radiali rispetto alla lunghezza d'onda.

4.3 Analisi numerica ad elementi finiti (FEA)

Per valutare la fattibilità della modellizzazione tramite FE del campo di rumore sismico di background – il quale, come meglio descritto nella Sez. 2.2, genera un gradiente di gravità a sua volta responsabile dello spostamento dello specchio – verrà utilizzata la soluzione analitica del problema di Lamb come benchmark da porre a confronto ad analisi dinamiche agli elementi finiti ottenute, simulando l'effetto delle onde sismiche, da i due software proposti (ANSYS e COMSOL). In questo modo si avrà una stima della bontà del metodo di analisi utilizzato (è possibile trovare ulteriori simulazioni numeriche ed analisi delle stesse nelle referenze [30] e [31]).

Prima di procedere con le simulazioni verrà riportata, nella sezione che segue, lo stato dell'arte riguardo la definizione dello smorzamento in ambiente FEM [32]; si verificherà, successivamente, se il modello creato con uno dei software sopra citati riproduca in modo adeguato l'andamento della soluzione analitica considerata.

4.3.1 Analisi del fenomeno dell'attrito attraverso il FEM

Come già descritto nella Sottosez. 2.2 del Cap. 2, le onde di Rayleigh rappresentano il maggior contributo all'energia sismica totale immessa nel sistema ed influiscono in modo significativo sulle strutture superficiali o sotterranee poco profonde [33]. Per questo motivo, tali onde rappresentano un parametro importante da tenere in considerazione nella risposta strutturale ad elementi finiti.

In ambiente FEM la matrice di dissipazione, generalmente, viene definita attraverso l'equazione seguente [32]:

$$[C] = \alpha [M] + \beta [K] + \sum_{j=1}^{N_{\text{mat}}} \beta_j [K_j] + [C_\xi] + [C_\omega] + \sum_{k=1}^{N_{\text{el}}} [C_k] . \quad (4.3)$$

in cui α e β rappresentano i coefficienti di Rayleigh. In generale, si hanno principalmente due tipi di smorzamento

- *viscoso*: causato dal movimento della struttura in un fluido; le forze smorzanti sono quindi dipendenti dalla velocità e, per vibrazioni libere, l'ampiezza dell'oscillazione ha un decadimento di tipo esponenziale;
- *strutturale*: provocato dall'attrito interno al materiale e dai collegamenti tra i componenti del sistema.

Entrambi operano di modo che sia l'ampiezza dell'onda che la sua energia diminuiscano all'aumentare della distanza dal punto di origine. Nell'analisi strutturale dinamica lo smorzamento strutturale è molto più importante di quello viscoso e viene normalmente approssimato, secondo la formulazione di Rayleigh, come combinazione lineare della matrice di massa M e rigidità K , per cui l'Eq. (4.3) può essere ben approssimata come segue:

$$[C] = \alpha [M] + \beta [K] . \quad (4.4)$$

Nell'Eq. (4.4), la quale rappresenta comunemente il modello di attrito più utilizzato, i coefficienti α e β sono determinati in base al rapporto di smorzamento ξ_n (*damping ratio*) associato all' n -esimo modo di vibrazione, espresso secondo l'equazione:

$$\xi_n = \frac{c_n}{2\sqrt{k_n m_n}} = \frac{\alpha m_n + \beta k_n}{2\sqrt{k_n m_n}} = \frac{\alpha}{2\omega_n} + \frac{\beta\omega_n}{2} , \quad (4.5)$$

in cui i vari coefficienti si ottengono attraverso la matrice modale $[\Phi]$:

$$[k_n] = [\Phi]^T [K] [\Phi] \quad (4.6)$$

$$[m_n] = [\Phi]^T [M] [\Phi] \quad (4.7)$$

$$[c_n] = [\Phi]^T [C] [\Phi] . \quad (4.8)$$

La determinazione dei coefficienti di smorzamento α e β avviene in genere tramite due differenti procedure a seconda che si fissi il valore di ξ_n in corrispondenza di una o due frequenze di vibrazione naturali opportunamente selezionate [34]. Secondo la prima procedura, imponendo che ξ_n assuma il valore ξ^* in corrispondenza della pulsazione ω^* , i coefficienti di Rayleigh assumono le seguenti espressioni:

$$\alpha = \xi^* \omega^* , \quad \beta = \xi^* / \omega^* , \quad (4.9)$$

ed il damping ratio del generico modo n è espresso dalla relazione:

$$\xi_n = \frac{\xi^*}{2} \left(\frac{\omega^*}{\omega_n} + \frac{\omega_n}{\omega^*} \right) . \quad (4.10)$$

La seconda procedura consiste invece nel fissare lo smorzamento modale in corrispondenza di due frequenze caratteristiche ω_1 e ω_2 . Assegnando lo stesso valore di ξ^* , in corrispondenza dei modi 1 e 2, si ottiene per α e β :

$$\alpha = \xi^* \frac{2\omega_1\omega_2}{\omega_1 + \omega_2} , \quad \beta = \xi^* \frac{2}{\omega_1 + \omega_2} . \quad (4.11)$$

Il damping ratio ξ_n associato all' n -mo modo di vibrazione risulta quindi:

$$\xi_n = \frac{2\xi^*}{\omega_1 + \omega_2} \left(\frac{\omega_1\omega_2}{2\omega_n} + \frac{\omega_n}{2} \right) . \quad (4.12)$$

Il suo andamento in funzione della pulsazione caratteristica ω_n è riportato in Fig. 4.3, in cui si osserva che alla frequenza in cui si intersecano le due curve rappresentanti gli smorzamenti proporzionali ai due coefficienti di massa e rigidità, la funzione risultante – data dalla loro somma – è in buona approssimazione costante. Effettuata quindi la scelta dei parametri ω_1 , ω_2 , e ξ^* è possibile determinare completamente i coefficienti α e β . Tuttavia, per geometrie più complesse, le frequenze eccitate dominanti ω_1 e ω_2 sono a priori non note ed i coefficienti ottimali sono scelti con l'approccio “trial&error”. Ciononostante, vi sono alcune regole da prendere in considerazione: siccome un elevato termine proporzionale alla massa dà luogo a sovra-smorzamenti a basse frequenze ed è legato ai moti di corpo rigido, solitamente, questo termine viene trascurato per strutture sottoposte a grandi moti rigidi. Per questi sistemi, si fa uso solamente del termine di smorzamento proporzionale alla rigidità ($\alpha = 0$) dal momento che una variazione del coefficiente α genera poca differenza nelle caratteristiche delle onde di Rayleigh, mentre una variazione di β influenza l'ampiezza delle onde stesse ma non la velocità di propagazione. La procedura consigliata per applicare un damping di Rayleigh specifico consiste nella scelta di un certo numero di tipologie di carico (sinusoidale, gaussiano, ...) e, successivamente, si determina la soluzione di questi casi senza smorzamento per identificare gli estremi in frequenza – f_{\min} e f_{\max} – nella risposta del sistema. Infine, si applica lo smorzamento entro un range di frequenze contenute nell'intervallo ($f_{\min} \div f_{\max}$) in modo tale che esso sia approssimativamente costante nello stesso. Questa scelta permette di assegnare il valore di ξ^* alle frequenze f_{\max} ed f_{\min} evitando automaticamente un sovra-smorzamento non richiesto all'interno dell'intervallo in questione³ (si faccia riferimento all'andamento della Fig. 4.3).

³Se la risposta del sistema è piccata intorno ad una certa frequenza specifica piuttosto che su un

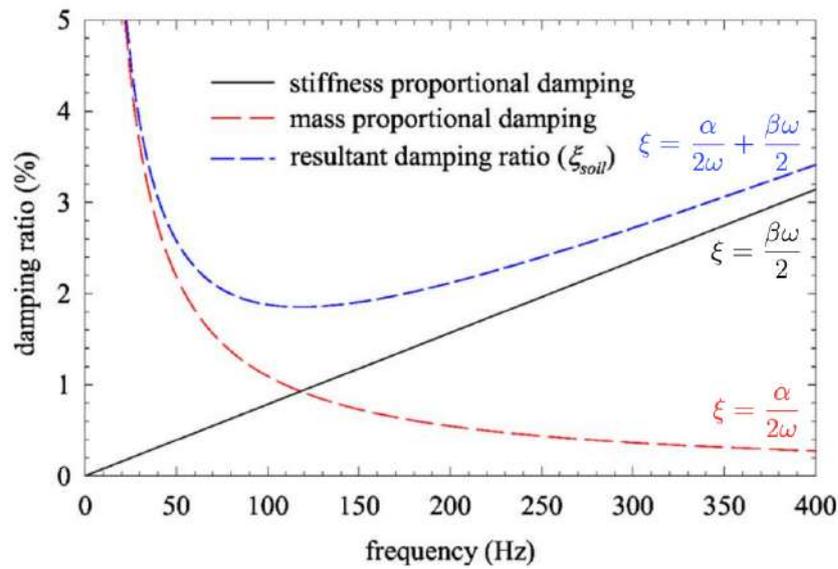
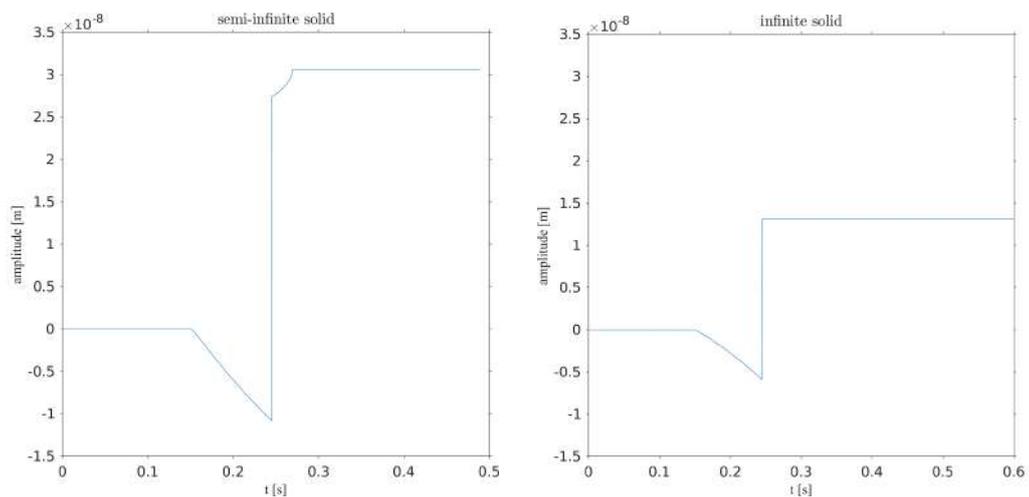


Figura 4.3 – Rapporto di smorzamento calcolato in funzione della frequenza combinando il termine di damping proporzionale alla massa con quello proporzionale alla rigidità. Nel range (50 ÷ 250) Hz: agli estremi $\xi = 2.5\%$, mentre all'interno dell'intervallo varia poco.

4.4 COMSOL vs ANSYS

Per prima cosa si è effettuata la rappresentazione grafica tramite MATLAB della soluzione analitica dell'Eq. (4.1) in due casi particolari di geometria.



(a) Caso di solido omogeneo semi-infinito.

(b) Caso di solido omogeneo infinito.

Figura 4.4 – Rappresentazione grafica (riprodotta in MATLAB) delle risposte analitiche ad una sollecitazione a gradino di Heaviside, in cui si riporta l'ampiezza dello spostamento nel dominio del tempo, nel caso di due particolari geometrie.

range di frequenze ampio, applicare il damping proporzionale a solamente la rigidità è quasi equivalente alla versione completa di massa.

1. Solido omogeneo semi-infinito stimolato da una sollecitazione di tipo Heaviside lungo l'asse \hat{z} (la cui risposta nel dominio del tempo è riportata Fig. 4.4a);
2. solido omogeneo infinito con diversi tipi di sollecitazione verticale: impulso gaussiano, sinusoidale e funzione di Heaviside; la risposta nel dominio del tempo di quest'ultima è rappresentata in Fig. 4.4b.

I grafici riprodotti in Fig. 4.4 sono stati effettuati per tutti i punti delle due geometrie sopracitate. Per confronto con le soluzioni analitiche di cui sopra, abbiamo riportato anche le risposte al gradino di Heaviside ottenute tramite simulazioni in COMSOL (in Fig. 4.5 graficate per un solo istante temporale), di nuovo tanto nel caso di un solido omogeneo semi-infinito (Fig. 4.5a) quanto per la geometria infinita (Fig. 4.5b).

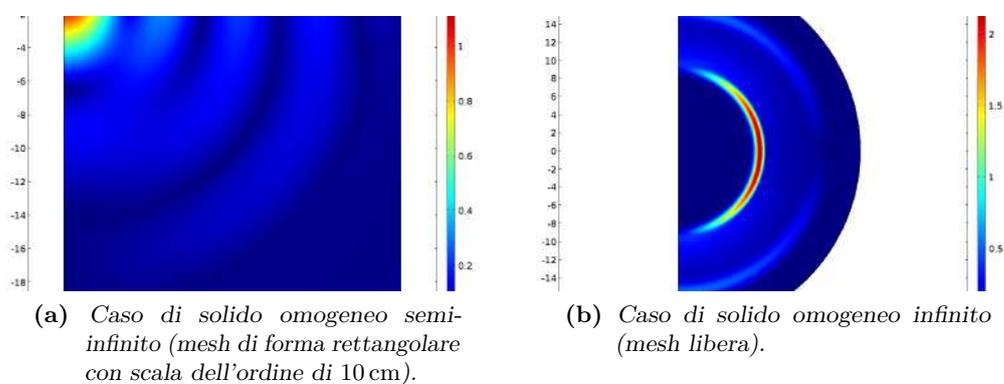


Figura 4.5 – Rappresentazione grafica (ottenuta da simulazioni in COMSOL) delle risposte a gradino di Heaviside: viene raffigurato il modulo dello spostamento (in cui il colore descrive l'intensità, maggiore verso il rosso) su una particolare sezione bidimensionale, nel caso di due geometrie particolari.

ANSYS & COMSOL: sollecitazione sinusoidale senza damping. Al fine di confrontare i risultati che si possono ottenere tramite i due software di simulazione abbiamo considerato la risposta del sistema omogeneo semi-infinito ad una sollecitazione di tipo sinusoidale con frequenza di 2 Hz ad una distanza radiale di 5 m dal punto di applicazione dell'impulso, come mostrato in Fig. 4.6.

Si è richiesto, come target da rispettare, la stabilità della soluzione in un intervallo di tempo di circa 30 s. In entrambi i casi presi in considerazione per i software di simulazione, la finezza della mesh, la risoluzione temporale e più in generale i parametri del materiale sono stati opportunamente modificati – in entrambi – ad ogni run della simulazione stessa.

Risulta evidente che, anche facendo uso di mesh (avente scala dell'ordine di 10 cm) e risoluzioni temporali piuttosto estreme – scelte per altro impraticabili per qualsiasi modello 3D realistico – non si è riusciti a trovare un accordo tra le soluzioni di ANSYS e COMSOL entro un errore relativo inferiore ad 1%. Inoltre, non è stato possibile determinare se uno dei due software fosse in errore ed, in caso affermativo, quale. Le differenze tra risultati restituiti potrebbero essere dovuti ad un diverso tipo di approssimazione delle matrici di soluzione nei kernel dei programmi, che impedisce quindi una perfetta uguaglianza quando si lavora su mesh molto fini e discretizzazioni temporali accentuate.

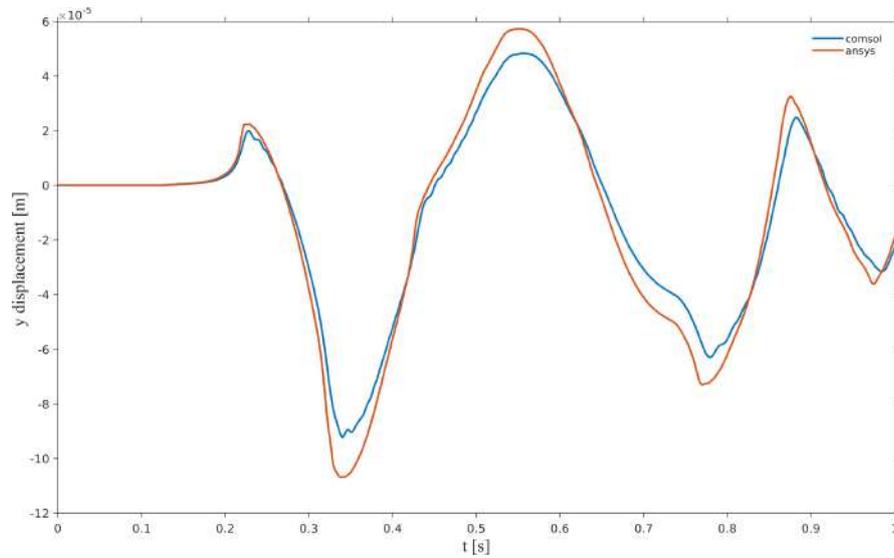
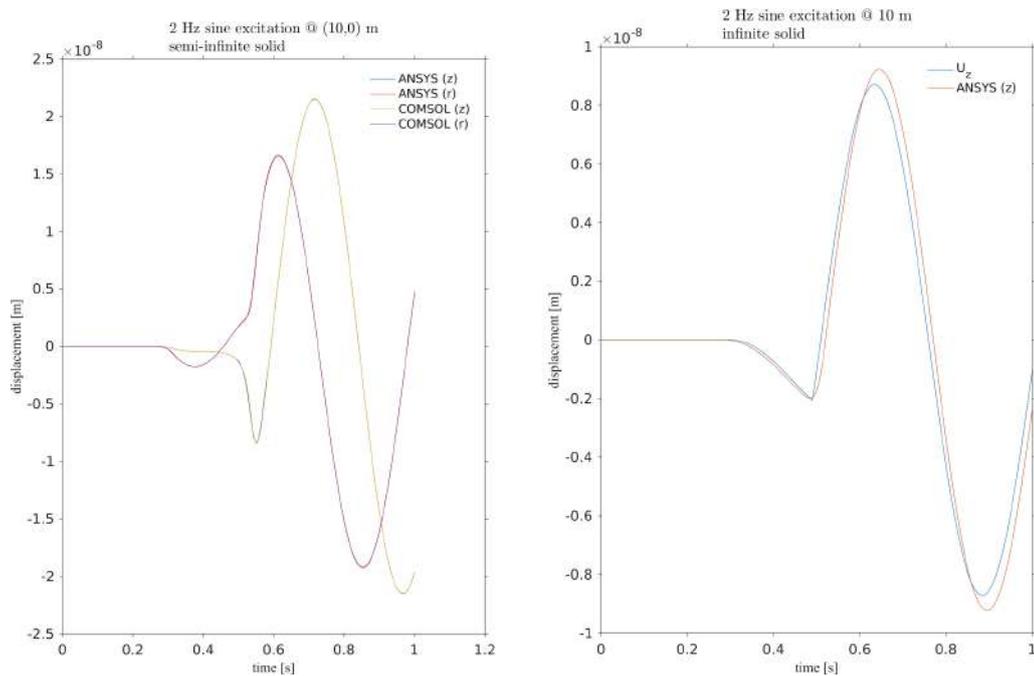


Figura 4.6 – Caso particolare di spostamento lungo \hat{y} in un solido omogeneo semi-infinito soggetto a sollecitazione sinusoidale di 2 Hz misurata (dai software ANSYS e COMSOL presi in considerazione) a distanza di 5 m dal punto di applicazione.



(a) Confronto tra le soluzioni dei software di simulazione ANSYS e COMSOL con smorzamento (buon accordo a meno dell'1% di errore).

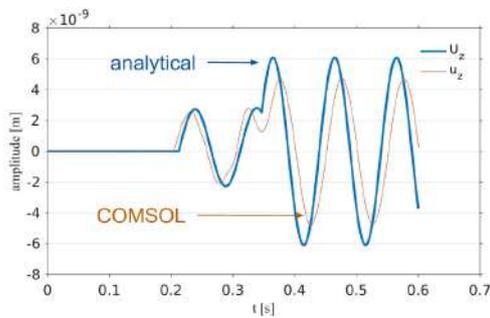
(b) Confronto tra la soluzione comprensiva di smorzamento in ANSYS e la soluzione analitica (accordo solo qualitativo: errore compreso tra (10 ÷ 40) %).

Figura 4.7 – Modelli a FE con smorzamento.

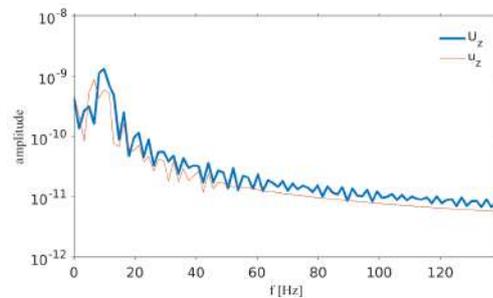
ANSYS & COMSOL: sollecitazione sinusoidale con damping. Diverso è, invece, il risultato ottenuto prendendo in esame anche l'effetto dovuto al damping prodotto

dalle onde di Rayleigh: è stato applicato, quindi, uno smorzamento nel range di frequenze calcolato secondo le linee guida presentate nella Sottosez. 4.3.1, utilizzando la stessa sollecitazione sinusoidale e mantenendo gli stessi parametri di finezza della mesh e discretizzazione temporale per entrambi i software. I risultati sono stati riportati in Fig. 4.7a in cui viene mostrato lo spostamento radiale in una simulazione temporale a 10 m dal punto di applicazione dell'impulso. Risulta evidente che, inserendo un termine di smorzamento di Rayleigh, i due software – a differenza del caso in assenza di damping (Fig. 4.6) – si trovano in perfetto accordo, con un errore relativo inferiore all'1%. Logica conseguenza è che, in tale caso, la scelta del software di simulazione risulta ininfluente.

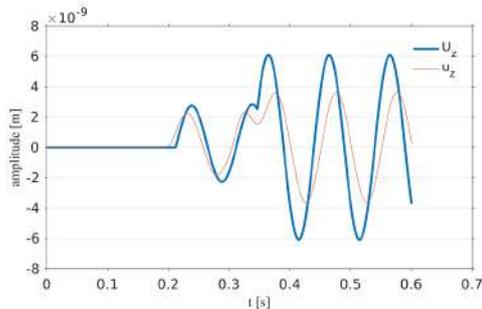
Nonostante la buona concordanza tra i risultati delle due simulazioni, appare chiaro che l'accordo tra la simulazione a FE (ad esempio quella in ANSYS) e la soluzione analitica al problema di Lamb non sia ottimale, come evidenziato in Fig. 4.7b.



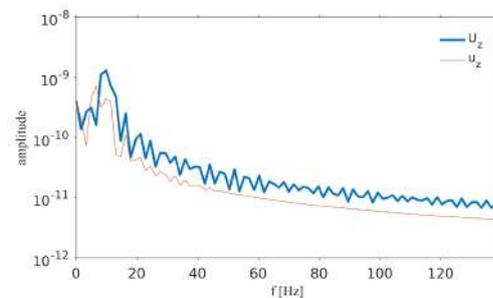
(a) Basso smorzamento nel dominio del tempo: sollecitazione sinusoidale di frequenza $f_0 = 10$ Hz.



(b) Basso smorzamento nel dominio della frequenza con coefficienti di smorzamenti $\alpha = 6.3 \cdot 10^{-3}$, $\beta = 1.6 \cdot 10^{-6}$.



(c) Alto smorzamento nel dominio del tempo: sollecitazione sinusoidale di frequenza $f_0 = 10$ Hz.



(d) Alto smorzamento nel dominio della frequenza con coefficienti di smorzamenti $\alpha = 6.3 \cdot 10^{-1}$, $\beta = 1.6 \cdot 10^{-4}$.

Figura 4.8 – Confronto tra la soluzione analitica (blu) e la simulazione numerica in COMSOL (arancione) nei casi di basso e alto smorzamento, sia nel dominio del tempo che della frequenza.

Si è quindi analizzato, in primo luogo, il diverso andamento della risposta al variare dei parametri di damping, come mostrato in Fig. 4.8: dal confronto tra le Fig. 4.8a e 4.8b con le Fig. 4.8c e 4.8d, si evince che all'aumentare dei coefficienti di smorzamento l'ampiezza delle oscillazioni diminuisce e le oscillazioni (in particolare quelle ad alta frequenza) vengono sovra-smorzate.

Fine-tuning del damping. Per cercare di ovviare a questo limite e rendere quanto più possibile compatibili le soluzioni numeriche ed il conto teorico, si è allora effettuato un “fine tuning” dei parametri α e β tramite COMSOL, come mostrato in Fig. 4.9.

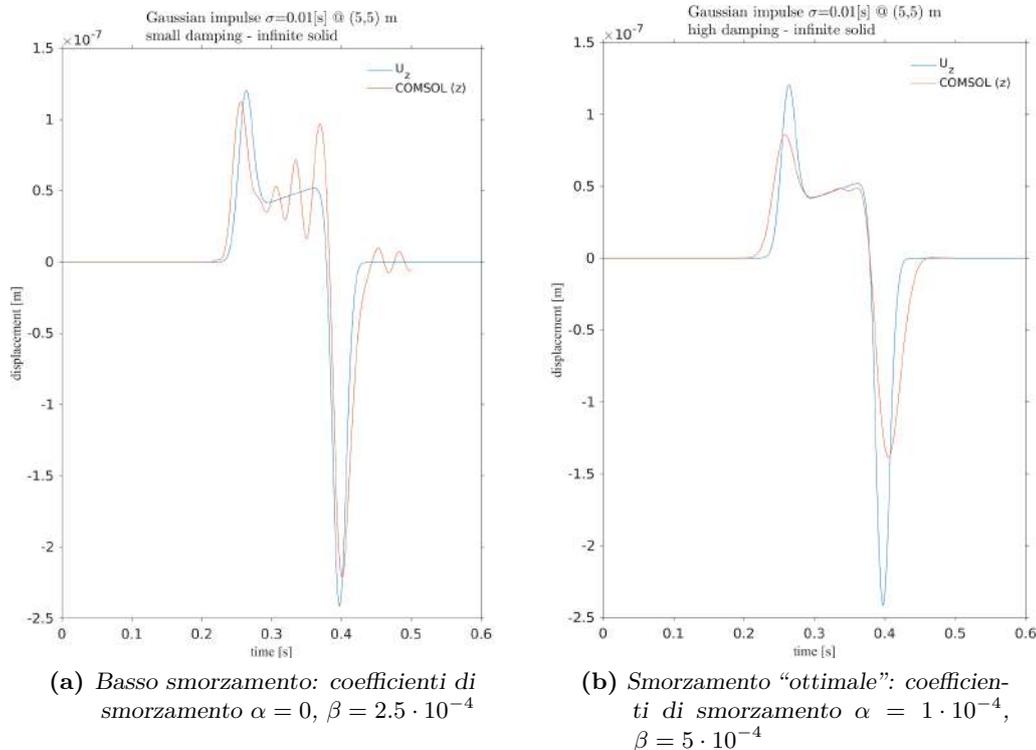


Figura 4.9 – Confronto dello spostamento del punto (5,5) m lungo l’asse \hat{z} con la simulazione in COMSOL per un impulso gaussiano in un solido omogeneo infinito per vari valori dei coefficienti di Rayleigh.

Attraverso simulazioni note in letteratura [33] e [31], è chiaro che:

- 🕒 quando il coefficiente α aumenta, β tende ad annullarsi, quindi lo smorzamento diminuisce con l’aumentare della frequenza;
- 🕒 quando è invece β ad aumentare, α tende a zero, ovvero lo smorzamento aumenta con l’aumentare della frequenza;
- 🕒 α produce dunque uno smorzamento significativo alle vibrazioni di bassa frequenza, mentre β ha lo stesso effetto sulle vibrazioni di alta frequenza.

In definitiva, i valori dei coefficienti di Rayleigh scelti sono quelli mostrati in Fig. 4.9b e sono il risultato di un compromesso tra l’eccessiva diminuzione dell’ampiezza delle oscillazioni ed il loro sovra-smorzamento: l’accordo che si trova è solamente qualitativo mentre quantitativamente è deficitario, in quanto – ad ora – non si è riusciti a trovare una coppia di valori di α e β atta a riprodurre l’accordo quantitativo sperato. Si osservi – in particolare – che, tanto nella Fig. 4.9a quanto nella Fig. 4.9b, lo smorzamento induce anche uno spostamento di fase dei picchi rispetto alla soluzione analitica; se si tenta, invece, di fare combaciare i picchi delle due soluzioni, analitica e a FE, si evidenziano oscillazioni aggiuntive nella soluzione simulata, non presenti in quella analitica. Tale comportamento rimane tuttora un problema aperto sul quale indagare a fondo.

Si è fatto uso delle simulazioni numeriche con damping, sebbene la soluzione analitica corrispondente sia priva di damping, in quanto tali simulazioni sono le uniche (tra quelle provate) che portano ad un compromesso accettabile.

Discretizzazione temporale. Vari test sono stati effettuati anche variando l'intervallo di discretizzazione temporale in COMSOL mantenendo però i coefficienti di damping costanti. In Fig. 4.10 si evidenzia il comportamento della soluzione analitica rispetto alle varie simulazioni effettuate con diversi step temporali. Si osserva che per riprodurre al meglio – ma comunque non perfettamente – la soluzione in questione si necessita di discretizzazioni temporali molto fini – come evidenziato dalla curva rossa – al di sotto di 0.5 ms, richiesta che risulta incompatibile con le potenzialità di calcolo a disposizioni per modelli 3D complessi.

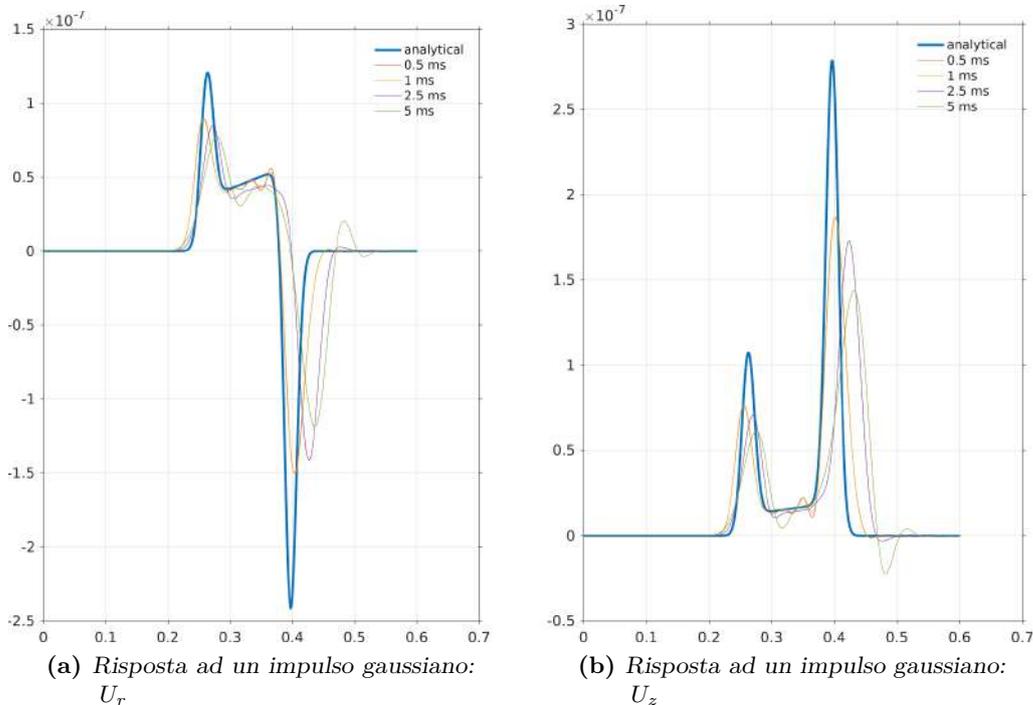


Figura 4.10 – Confronto tra la soluzione analitica e le soluzioni numeriche effettuate con discretizzazioni temporali differenti.

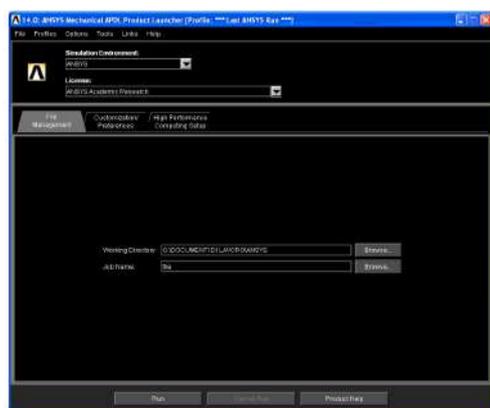
Conclusioni. Vi sono alcune criticità riscontrate, prima fra tutte la non concordanza quantitativa rispetto alla soluzione analitica al problema di Lamb, fatto probabilmente inevitabile in sistemi reali caratterizzati da smorzamento. Non è stato possibile, infatti, ottimizzare i valori dei coefficienti di Rayleigh per confronto con la soluzione analitica in quanto essa risulta – per definizione – priva di tale attenuazione. Una possibile validazione sarebbe quella di stimolare, tramite una forza impulsiva esercitata direttamente sul sito, un numero arbitrario di sensori sismici posti a differenti distanze dal punto di sollecitazione stesso e ricavare, dalla risposta ottenuta, i valori ottimali dei coefficienti di smorzamento tramite un fit parametrico. In aggiunta a questo, come per le simulazioni numeriche effettuate in assenza di smorzamento, anche in quelle in cui

tale attenuazione risulta presente sarebbero necessarie condizioni estreme di finezza di mesh e discretizzazione temporale per ottenere una buona concordanza con il caso reale, scelte impraticabili per questa tesi dal punto di vista di tempo e memoria per la simulazione.

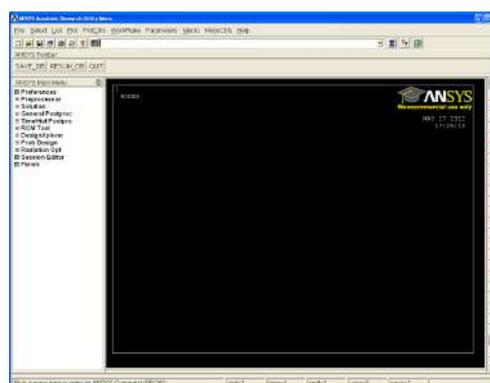
Dopo i vari test esplicitati nei paragrafi precedenti, nonostante la concordanza non ottimale tra il calcolo ad elementi finiti e la soluzione analitica corrispondente si è comunque proceduto all'utilizzo di FEM per la simulazione del campo sismico tramite ANSYS, in quanto la scelta tra i due software numerici risulta del tutto indifferente. Nella prossima sezione, quindi, si propone una breve panoramica del software utilizzato per eseguire le varie simulazioni durante il lavoro di tesi.

4.5 ANSYS APDL

ANSYS è un programma ad elementi finiti che permette di risolvere diversi problemi di fisica, in particolare di tipo elettromagnetico, strutturale e termico ed eventualmente anche accoppiati fra loro. Analisi di questo genere possono essere di vari tipi: statico, armonico o in transiente, a seconda delle necessità. Durante questa tesi si sono effettuate simulazioni di tipo strutturale, tramite il pacchetto “Multiphysics simulation” in cui è disponibile una gamma completa di strumenti per analizzare i singoli casi di carico, fare analisi di vibrazioni o transienti; è anche possibile esaminare il comportamento lineare o non lineare di materiali e geometrie differenti. In Fig. 4.11a è mostrata la schermata di avvio di ANSYS dalla quale è possibile selezionare le caratteristiche principali della simulazione, quali il pacchetto specifico di cui si vuole fare uso, la cartella di destinazione, il numero di CPU da utilizzare per elaborare la soluzione. . . . Mentre in Fig. 4.11b è visibile la GUI del programma dalla quale si possono inserire la maggior parte dei comandi più comuni: per altri comandi, invece, maggiormente specifici è necessario utilizzare la CLI (Command Line Interface).



(a) Schermata di avvio di ANSYS APDL.



(b) Esempio di schermata dell'interfaccia grafica di ANSYS.

Figura 4.11 – Interfacce grafiche del software ANSYS.

Essendo le simulazioni effettuate del tipo ad elementi finiti, anche nel caso di ANSYS si sono dovute seguire le linee guida elencate nei punti della Sottosez. 4.1.1. Nel capitolo che segue, verrà descritto il modello di test di cui si è fatto uso sia per simulazioni modali che per una semplice simulazione temporale.

CAPITOLO 5

PATTERN 3D

In questo capitolo verranno calcolate le mappe di sensitività a partire dalle soluzioni modali effettuate in ANSYS. Queste verranno poi confrontate con pattern teorici attesi nel caso in 3D, derivati a partire da considerazioni fisiche sul sistema considerato (con opportune approssimazioni).

5.1 Modello di test 3D

Per prima cosa, si dovrebbe essere in grado di riprodurre una soluzione temporale che sia *ben rappresentativa di un rumore sismico*: il problema che vogliamo discernere, infatti, non consta nel capire se una soluzione fatta tramite la sovrapposizione di modi normali ben approssimi una soluzione temporale¹, ma se questa soluzione nel tempo sia distintiva del rumore in questione. In particolare, essa dovrebbe essere caratterizzata da fluttuazioni puntuali che però siano in qualche modo correlate (dal punto di vista spaziale) con i primi vicini, come nella realtà accade per un rumore sismico: questo è un punto molto difficile sia da quantificare che da simulare, sul quale ritorneremo nel Cap. 7 delle discussioni. In merito a quanto asserito, non essendo a conoscenza dello spettro di un rumore sismico reale, una prima condizione che imponiamo (quantomeno in un modello omogeneo di solido semi-infinito) è l'andamento di *spettro piatto*² in frequenza sulla superficie $z = 0$. Nel caso di un modello più realistico, completo di strutture e proprietà del terreno differenti, lo spettro potrebbe non risultare più tale, in quanto potrebbero esserci diversi fattori (anche le strutture stesse) che contribuiscono maggiormente in alcuni modi, mettendoli in risalto più di altri.

Al fine di effettuare una sorta di validazione simile a quella realizzata per il caso 1D, nelle simulazioni si è modellizzato il terreno in un caso molto semplice, come un parallelepipedo omogeneo di dimensioni $40 \times 40 \times 20$ m, come mostra la Fig. 5.1, con densità del suolo $\rho = 2000 \text{ kg m}^{-3}$, in cui la massa di test si suppone abbia massa ($m = 100 \text{ kg}$) e sia posizionata nel punto $(0, 0, 1) \text{ m}$ ³.

¹Costruendo, infatti, una qualsiasi soluzione temporale forzata questa risulta ben rappresentabile tramite i modi normali (si veda la Sez. 3.2 per maggiori dettagli).

²Uno spettro piatto è la caratteristica principale di un rumore, in cui però tutti i punti mostrano un andamento scorrelato dagli altri (effetto non corretto in presenza di materiali/strutture accoppianti).

³I valori scelti non sono quelli effettivi, ma sono realistici nel senso che riproducono quantomeno

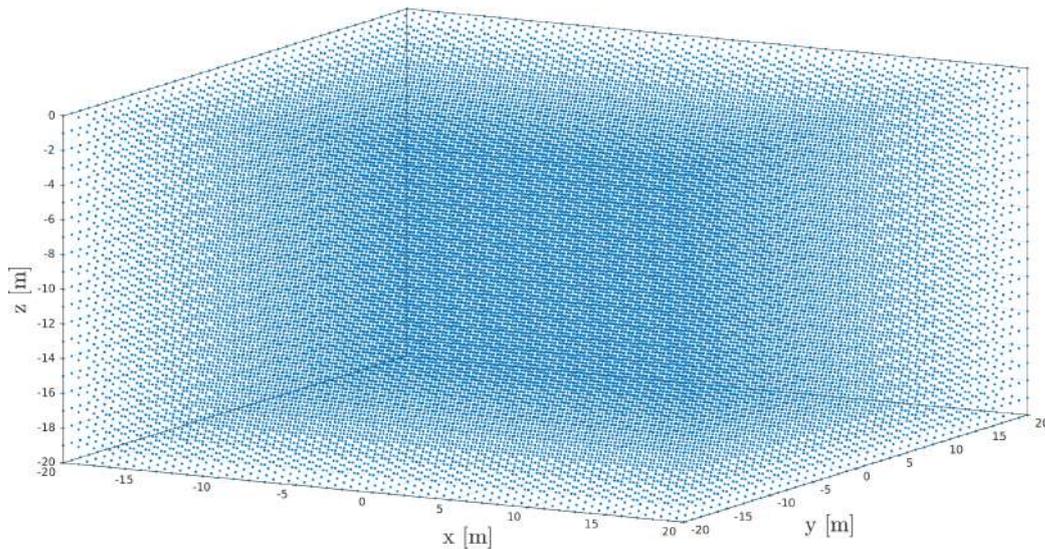


Figura 5.1 – Schematizzazione di un parallelepipedo omogeneo ($\rho = 2000 \text{ kg m}^{-3}$) utilizzato come modello di test nelle simulazioni modali di ANSYS. La massa di test ($m = 100 \text{ kg}$) è stata posta nel punto $(0, 0, 1) \text{ m}$.

Sono state fissate delle condizioni al contorno di tipo “sliding-wall” su tutte le superfici eccetto quella a $z = 0$ ⁴; tale tipologia di condizioni è solo una tra le varie scelte accettabili. Dal momento che – nelle simulazioni in ANSYS – è necessario ancorare il sistema (in questo caso, nei quattro vertici di base) per evitare la produzione di moti collettivi di sbilanciamento verso un estremo (i quali sovrasterebbero grandemente le oscillazioni che vogliamo analizzare, rendendole non apprezzabili nel calcolo della correlazione), la scelta è ricaduta su queste condizioni in cui tutti i punti appartenenti alle superfici soggette a tale requisito sono liberi di muoversi ma contemporaneamente vincolati a rimanere su di esse. Questa richiesta, inibendo gli spostamenti ortogonali al piano, minimizza la probabilità che un moto collettivo generi uno sbilanciamento verso un lato, provocando un effetto cumulativo del sistema.

Si è fatto inoltre uso di una mesh di tipo uniforme (per maggiori dettagli sul motivo della scelta si veda l’App. F) nella quale le sollecitazioni che vogliono riprodurre il campo sismico sono state implementate mediante 100 forze puntuali con densità uniforme nello spazio, caratterizzate da direzione casuale ed ampiezza $f_n^j = \text{cost}$, distribuite poissonianamente nel tempo, con un valore medio di ripetizione $\mu = 1 \text{ s}$.

In riferimento al modello sopra descritto indaghiamo, con opportune analisi ed approssimazioni dal punto di vista fisico, quale sia il pattern – quantomeno qualitativo – atteso per le mappe di sensitività nel caso 3D.

l’ordine di grandezza effettivo.

⁴La superficie a $z = 0$ deve ovviamente risultare libera, per permettere il calcolo della forza newtoniana.

5.2 Pattern teorico atteso dalla sollecitazione

In una struttura schematicamente rappresentata come in Fig. 5.2, per la componente della forza newtoniana nella direzione del fascio (lungo \hat{y}) si ha realisticamente un andamento del tipo:

$$F^y = k \frac{y}{r^3}, \quad (5.1)$$

dove $r = r(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + (z - z_0)^2}$ è la distanza dal punto di applicazione della sollecitazione.

Ciò che si vuole analizzare è l'effetto sulla massa di test prodotto dallo spostamento (dx, dy, dz) di un elemento di massa dm inizialmente posto in (x, y, z) : matematicamente, questo equivale alla definizione di derivata parziale rispetto alle singole coordinate.

Il motivo per cui è atteso un pattern analogo alla derivata della forza newtoniana agente sullo specchio è dato dal fatto che i coefficienti di tale forza, i quali assegnano il peso dei contributi per ogni modo, si possono scrivere come segue:

$$f_n^j = F^j(\mathbf{r} + \Delta\mathbf{r}_n) - F^j(\mathbf{r}), \quad (5.2)$$

in cui $j \in \{x, y, z\}$ identifica la direzione scelta, $\Delta\mathbf{r}_n \equiv \mathbf{m}_n(\mathbf{r})$ e $F^j(\mathbf{r})$ la forza newtoniana quando il sistema, idealmente, non è soggetto ad alcuna sollecitazione. Risulta chiaro che l'Eq. (5.2) divisa per piccoli valori di spostamento $\Delta\mathbf{r}_n$ rappresenta proprio il limite del rapporto incrementale di $F^j(\mathbf{r})$, che tende alla derivata⁵. In Fig. 5.3a, 5.3b, 5.3c sono riportati gli andamenti relativi alle derivate parziali della sollecitazione rispetto alle varie coordinate.

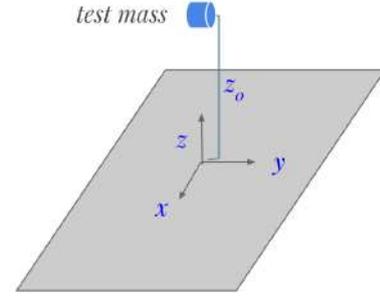


Figura 5.2 – Schema di posizionamento della massa di test.

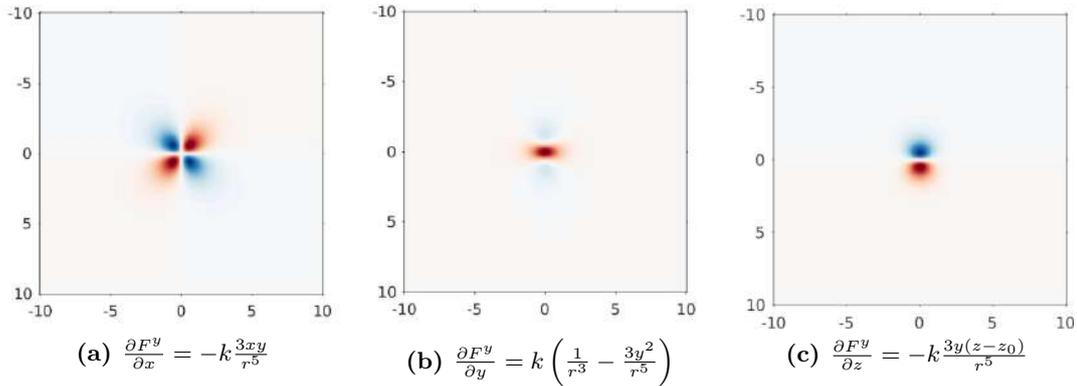


Figura 5.3 – Caratteristiche delle derivate parziali della sollecitazione F^y .

Il pattern che risulta, invece, per la forza in Eq. (5.1) è mostrato in Fig. 5.4: questa rappresenta una informazione “proporzionale” alla Fig. 3.4b, in quanto è riportata solamente l'intensità della forza stessa in funzione della posizione (anziché la correlazione)⁶.

⁵In una situazione di assenza di perturbazione, l'unico contributo non nullo della forza newtoniana sarebbe lungo la direzione \hat{z} , fatte salve le ovvie proprietà di simmetria della distribuzione di massa.

⁶I due grafici in questione danno la stessa informazione spaziale.

Si osservi che, tanto nelle Fig. 5.3 quanto nella Fig. 5.4, le aree colorate identificano:

- ② le zone rosse un valore positivo (o incremento) della quantità presa in considerazione (la forza newtoniana F^y o una delle sue derivate parziali) in funzione delle coordinate;
- ② le zone blu un valore negativo (o decremento) delle medesime quantità rispetto alle stesse coordinate;

la “concentrazione” di colore è legata in maniera direttamente proporzionale al valore dell’intensità stessa: le figure prese in esame, infatti, sono state riprodotte con un valore di K nella forza newtoniana unitario e dimensionato in modo tale da rendere la forza stessa adimensionale. L’intensità del colore, quindi – in tutte le mappe che verranno mostrate nel seguito – è scalata in modo arbitrario in quanto, ai fini della tesi, si vuole evidenziare il contrasto dell’informazione⁷.

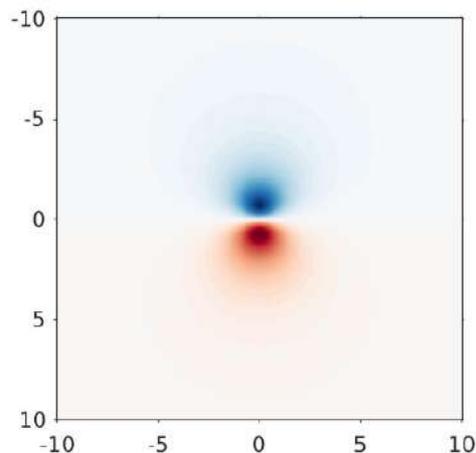


Figura 5.4 – Pattern atteso per la forza $F^y = k \frac{y}{r^3}$.

Parallelismo con il sistema fisico. Si tenga presente, in primo luogo, che questi pattern (validi su tutto il volume) sono dovuti ad una sollecitazione *puntuale*, spostando cioè un singolo dm alla volta⁸, mantenendo tutti gli altri punti imperturbati; si sono assunte:

1. l’indipendenza di ogni coordinata da quelle vicine;
2. l’indipendenza tra coordinate ortogonali (in ciascun punto).

Queste ipotesi non sono verificate in generale: a causa delle grandi infrastrutture presenti che possono accoppiare punti spazialmente separati, nonché alle proprietà fisiche del terreno, esiste una scala di lunghezza entro la quale non è corretto disaccoppiare il moto di punti vicini; tale scala (identificata tramite la minima lunghezza d’onda alla quale inizia l’effetto di smorzamento tra i moti dei suddetti punti) prende il nome di *lunghezza di coerenza*.

In definitiva, la forza risultante è composta dalla somma dei contributi dovuti a spostamenti di masse infinitesime integrati su tutto il volume del solido in questione:

$$F^j(\mathbf{r}) = \int_V k \frac{\rho}{r^2} \frac{j}{r} dV. \quad (5.3)$$

Da queste osservazioni, risulta quindi chiaro come il tipo di pattern della forza e delle sue derivate – e conseguentemente le mappe di sensitività cercate – cambino in base

⁷Ad esempio, le mappe di correlazione discusse nel Cap. 6 e seguenti, sono tutte costruite normalizzando ogni quantità considerata nel calcolo della correlazione stessa rispetto alla propria deviazione standard: l’intensità del colore mette quindi solamente in risalto l’informazione desiderata.

⁸Nei casi rappresentati graficamente, il punto in questione è stato posizionato nell’origine per comodità di visualizzazione; tale pattern sarebbe però analogo per ogni altro punto preso in considerazione.

al modello scelto; quando vengono aggiunte anche le strutture, i pattern cambiano ulteriormente, dando luogo a deviazioni significative rispetto alle Fig. 5.3 e 5.4.

Inoltre, nessun sistema fisico reale può effettivamente generare un rumore bianco (significherebbe che tutte le frequenze siano caratterizzate dalla stessa intensità⁹, fatto fisicamente impossibile per ragioni energetiche): pertanto, anche questo allontanamento dall'idealità porterà delle modifiche ai pattern.

Andamento realistico dei pattern. In base a quanto appena asserito, i pattern che ci attendiamo dalle mappe informative in output da simulazioni che utilizzano il modello sopra descritto dovrebbero essere simili nell'aspetto a quelli in Fig. 5.3, ma non identici: la similitudine nella forma dovuta alla semplicità del modello scelto (omogeneo, regolare con caratteristiche di indipendenza tra le coordinate), con difformità dovute invece alla composizione modale (e quindi alle lunghezze d'onda corrispondenti) presente nella simulazione.

5.3 Risultati soluzioni modali

Tramite ANSYS si sono calcolati 5000 modi normali (in modo da avere un sistema abbastanza ben caratterizzato), dei quali ne riportiamo tre (modi con $n \in \{3, 4, 8\}$) a titolo di esempio in Fig. 5.5.

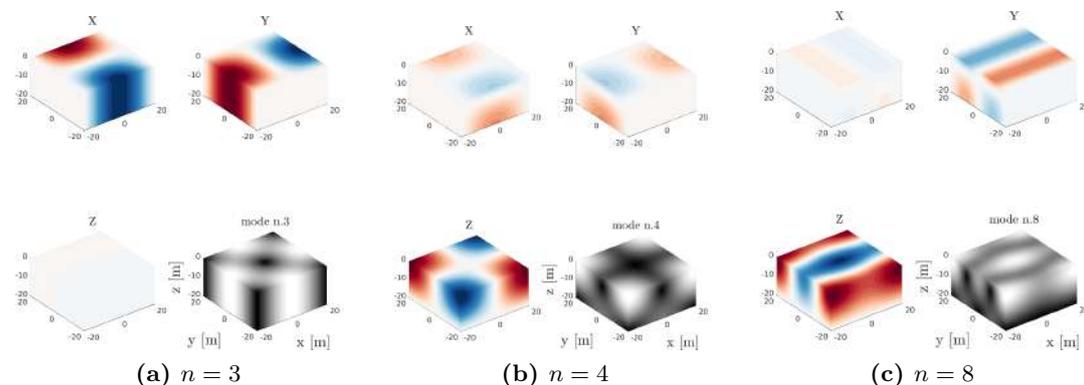


Figura 5.5 – Alcuni modi normali generati in ANSYS: per ciascuno di essi, le tre figure colorate rappresentano lo spostamento (rosso se positivo, blu se negativo) rispettivamente in x , y , z ; la figura in bianco e nero invece rappresenta il modulo dell'intensità (tanto più è intenso il colore quanto più lo spostamento è elevato).

Per ciascuno di essi, le tre figure colorate rappresentano lo spostamento rispettivamente in x , y , z (rosso quando positivo, blu se negativo) mentre la figura in bianco e nero rappresenta il modulo dell'intensità: tanto più è intenso il colore quanto più lo spostamento (non importa se positivo o negativo) è elevato.

⁹In modo del tutto equivalente, i pattern derivativi corrisponderebbero quindi ad un sistema ideale descrivibile come una somma infinita di modi normali eccitati ognuno alla propria auto-frequenza ed aventi tutti gli stessi pesi.

5.3.1 Mappe di sensitività 3D

Per cominciare, in analogia con il semplice caso 1D, scegliamo di utilizzare nella media i pesi $w_n \propto 1$ (corrispondenti ai coefficienti fisici $a_n \propto 1$). Analizzando la componente lungo \hat{y} della sollecitazione (F^y) per poterla confrontare con quanto già esplicitato relativamente alla Fig. 5.3, riportiamo in Fig. 5.6 le mappe di sensitività in tre casi differenti, ovvero con i sensori disposti lungo la direzione \hat{x} , \hat{y} e \hat{z} . Il risultato ottenuto

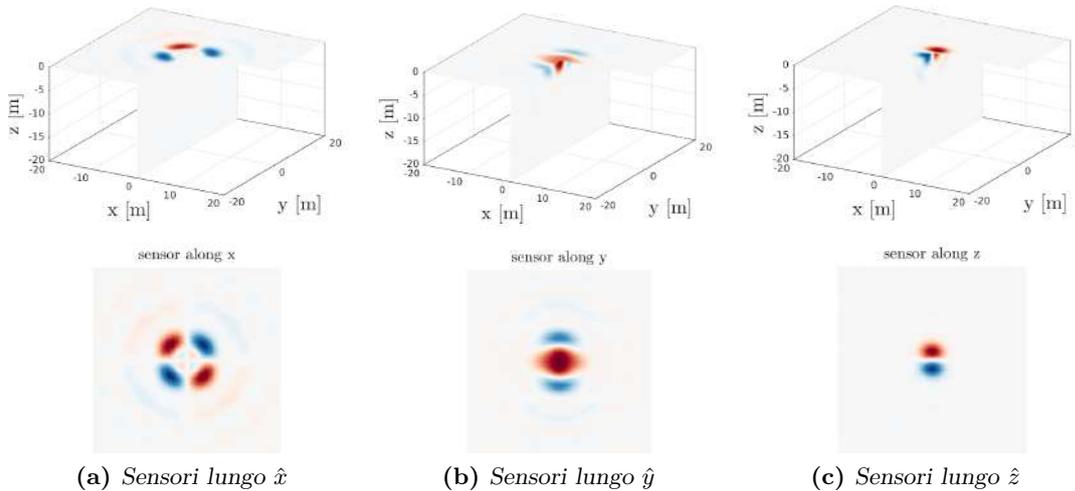


Figura 5.6 – Mappe 3D di sensitività per la componente F^y della sollecitazione newtoniana per differenti posizionamenti dei sensori, ottenute utilizzando coefficienti $a_n \propto 1$.

è estremamente interessante, in quanto lungo \hat{z} (si faccia riferimento alla Fig. 5.6c) riproduce in maniera pressoché analoga i pattern attesi, cioè quelli presentati in Fig. 5.3c. Anche lungo le altre due direzioni – si veda il confronto tra le Fig. 5.3b e 5.3c e le corrispondenti Fig. 5.6b e 5.6c – l'accordo è buono, sebbene si noti in modo più o meno evidente il contributo *finito*¹⁰ delle armoniche che costituiscono i coefficienti f_n^j/σ_F . Inoltre, è importante osservare che l'informazione delle mappe di cui sopra è contenuta non solo sulla superficie ma anche all'interno del volume, come ben evidenziato dal piano xz visibile in ciascuna delle immagini 3D in Fig. 5.6. È quindi possibile ricavare informazioni indipendenti sulla forza posizionando sensori lungo le tre direzioni.

Riassumendo, le soluzioni modali qui presentate appaiono tali da soddisfare le condizioni che sono richieste per il caso tridimensionale, pur non essendo messe a confronto con delle vere e proprie soluzioni temporali ottenute dalle simulazioni in ANSYS: il buon confronto (quantomeno qualitativo) con i pattern derivativi dà l'idea che tali soluzioni vadano nella direzione sperata.

Inoltre, è importante ricordare che la *forma* delle mappe di sensitività, le quali ci comunicano le posizioni ottimali nelle quali disporre i sensori sismici per ottenere la massima informazione possibile riguardo alla forza newtoniana agente sulla massa di test, cambiano sia variando la geometria del modello, sia modificando le caratteristiche fisiche del sistema, quali (ad esempio) l'accoppiamento delle tre direzioni nella propagazione delle onde sismiche.

¹⁰La Fig. 5.6 risulta meno definita rispetto alla corrispondente Fig. 5.3 teorica in quanto si è fatto uso di un numero finito di armoniche (il numero di modi normali generati da ANSYS è finito).

5.3.2 Densità dei modi

Si è voluto analizzare inoltre, come per il caso 1D, l'andamento della densità dei modi in frequenza. Per fare questo è necessario dapprima determinare la frequenza in funzione del numero caratteristico del modo: tale andamento è approssimativamente lineare in scala bi-logaritmica, secondo l'equazione

$$\ln(f) = \gamma \ln(n) + \delta \implies f = n^\gamma e^\delta \quad (5.4)$$

(con parametri $\gamma = 0.3623 \pm 0.0002$ e $\delta = -0.1534 \pm 0.0015$ ottenuti da un fit di ANSYS), come visibile in Fig. 5.7a, con un evidente scostamento a basse frequenze dettato dall'intervento della geometria e dalle condizioni al contorno del modello. La dipendenza di tipo potenza dal numero del modo mostrata in Eq. (5.4) è ben spiegata dal fatto che la degenerazione aumenta al crescere del numero modale¹¹. L'andamento della densità dei modi si ottiene derivando l'espressione di n fornita dall'Eq. (5.4) rispetto alla frequenza f , ottenendo la seguente espressione

$$\frac{dn}{df} = \frac{e^{-\delta/\gamma}}{\gamma} f^{\frac{1}{\gamma}-1}, \quad (5.5)$$

di cui è riportata una rappresentazione grafica in Fig. 5.7b.

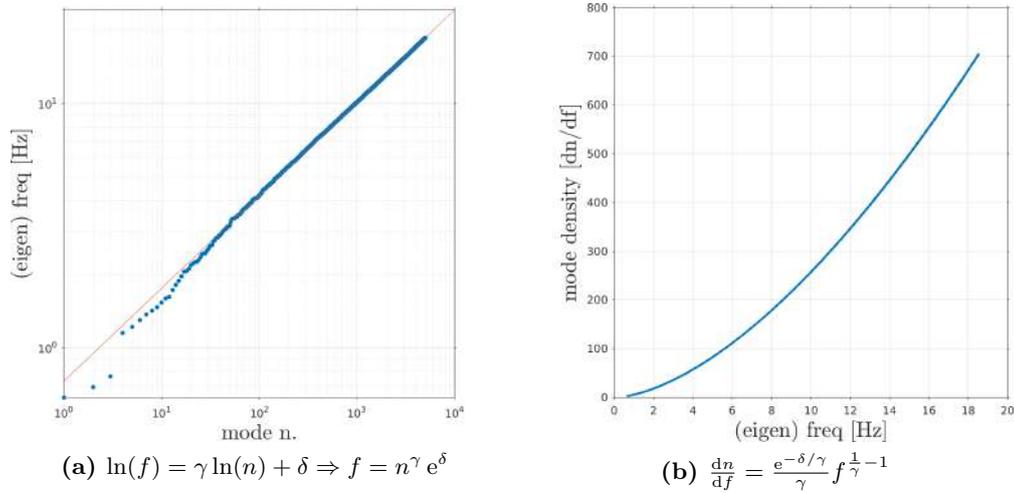


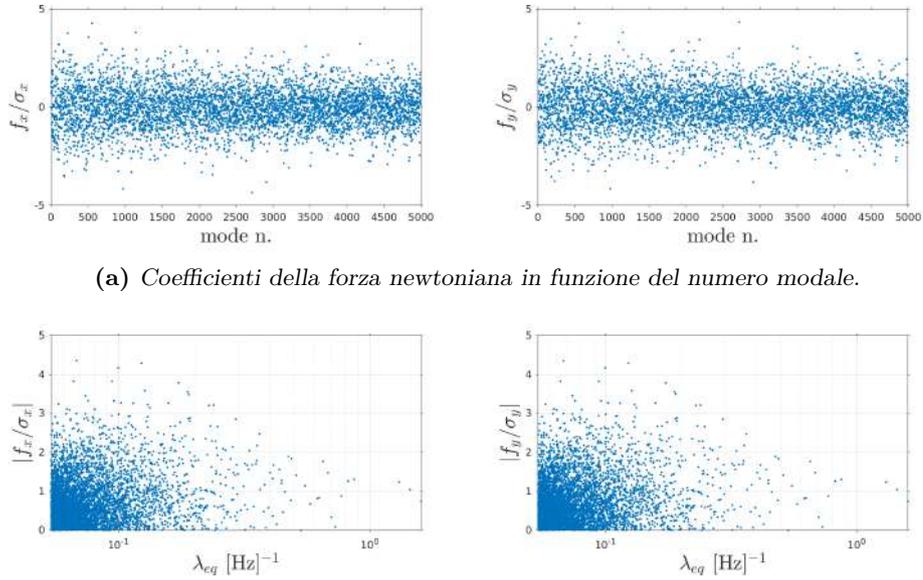
Figura 5.7 – A sinistra è graficata la frequenza dei modi normali in funzione del numero del modo (scala bi-logaritmica) in cui $\gamma = 0.3623 \pm 0.0002$ e $\delta = -0.1534 \pm 0.0015$, mentre a destra si ha la densità dei modi in funzione della frequenza.

Ricordando che l'espressione per i coefficienti f_n^j della forza è data dall'Eq. (5.2) ove lo spostamento è dovuto al modo normale n -esimo [$\Delta \mathbf{r}_n \equiv \mathbf{m}_n(\mathbf{r})$] e volendo determinare l'andamento dei coefficienti della forza newtoniana normalizzata f_n^j/σ_F in relazione alla lunghezza d'onda equivalente¹², sono stati riportati dapprima tali coefficienti in funzione del numero modale, come si osserva in Fig. 5.8a. Convertendo tale relazione in funzione della lunghezza d'onda equivalente e riportando i coefficienti

¹¹Essendo il nostro sistema descritto come una “scatola” omogenea, per ragioni di simmetria, all'aumentare del numero modale n la degenerazione cresce sempre di più. Ciò non avverrebbe, invece, nel caso in cui il sistema non fosse omogeneo.

¹²La lunghezza d'onda λ_{eq} è sostanzialmente l'inverso della frequenza f , a meno di una costante.

in modulo si evince, come mostrato in Fig. 5.8b, un loro comportamento decrescente all'aumentare della λ_{eq} stessa, similmente a quanto avviene nel caso 1D (si veda Fig. 3.3).



(a) Coefficienti della forza newtoniana in funzione del numero modale.

(b) Modulo dei coefficienti della forza newtoniana in funzione di $\lambda_{eq} \propto 1/f$.

Figura 5.8 – Andamento dei coefficienti della forza newtoniana normalizzata f_n^j/σ_F , dove f_n^j indica la componente j -esima della forza newtoniana associata al modo n -esimo e σ_F la deviazione standard.

CAPITOLO 6

SOLUZIONI PSEUDO-TEMPORALI

Per effettuare una validazione del metodo descritto nel Cap. 5 (analogamente al caso 1D) si dovrebbe fare uso di soluzioni temporali per il calcolo diretto della correlazione – e quindi delle mappe associate –, da confrontare con le mappe di sensitività ricavate dalla media pesata dei modi derivanti da una soluzione modale in 3D: come già esplicitato precedentemente, non è possibile realizzare una soluzione nel tempo che sia ben rappresentativa del campo di rumore sismico che vogliamo riprodurre, non essendo a conoscenza del rispettivo spettro nonché della distribuzione delle sorgenti che lo generano. Per questo motivo, in alternativa al calcolo diretto della correlazione a partire da soluzioni fisiche, ci proponiamo di validare il metodo descritto tramite la generazione di soluzioni – sempre dipendenti dal tempo – ma non dinamiche: chiameremo questo tipo di soluzioni *pseudo-temporali* per rimarcare il fatto che esse non derivino dall’equazione del moto del sistema con opportune condizioni iniziali e/o al contorno. Tali soluzioni, infatti, saranno costruite tramite il principio di sovrapposizione dei modi di vibrazione, il quale assicura che ogni spostamento $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ possa essere descritto da una sovrapposizione (idealmente infinita) di modi normali del sistema – come esplicitato in Eq. (3.2) –. Costruiremo quindi, secondo questo principio, una collezione di soluzioni che, in linea generale, non provengono da una simulazione dinamica del sistema. Vi è solamente un caso particolare – ideale – nel quale le $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ ricavate tramite il principio di sovrapposizione sono effettivamente delle soluzioni dinamiche a tutti gli effetti: quando gli a_n e ϕ_n che caratterizzano i coefficienti temporali in Eq. (3.3) della decomposizione vengono mantenuti costanti nel tempo. Questa scelta, infatti, è rappresentativa del caso ideale in cui i modi del sistema, una volta eccitati, continuano a vibrare ognuno alla propria auto-frequenza in maniera totalmente indipendente gli uni dagli altri: in altre parole, siamo in presenza di un ipotetico sistema privo di damping.

Benché si vorrebbero delle soluzioni descrittive della dinamica – seppur idealizzata – del sistema, come già discusso precedentemente nel Cap. 4, un modello privo di damping non risulta ben rappresentativo (nelle simulazioni a FE) nemmeno del caso più semplice e idealizzato (per maggiori dettagli si faccia riferimento alla Sez. 4.4). In questo capitolo si andrà quindi a variare – in maniera più o meno marcata – l’andamento temporale dei coefficienti $A_n(t)$ della decomposizione in Eq. (3.2) per inserire nel sistema preso in considerazione uno smorzamento, al fine di avvicinarsi quanto più possibile al caso reale. Le soluzioni che verranno costruite tramite queste

scelte perderanno, inevitabilmente, il legame con la dinamica del sistema e non potranno essere considerate delle “reali” soluzioni nel tempo. Questo è il motivo fondamentale della scelta dell’aggettivo “pseudo-temporale”.

Inoltre tali soluzioni, per effetto della loro costruzione, possiedono un ordinamento temporale *arbitrario*. Questo fatto non ci preoccupa, in quanto l’obiettivo che perseguiamo è il calcolo della correlazione a partire da queste soluzioni (e dalla forza newtoniana) per la costruzione delle mappe d’informazione ad essa relative: l’ordinamento temporale della soluzione risulta, quindi, irrilevante. Nel seguito si andranno ad analizzare le proprietà delle soluzioni sopra descritte e se queste siano adatte allo scopo di validazione prefissato.

6.1 Costruzione di soluzioni pseudo-temporali

Si ricorda innanzi tutto che, a partire dalla usuale decomposizione in modi normali in cui i coefficienti temporali $A_n(t)$ sono descritti dall’Eq. (3.3), le ω_n rappresentano le frequenze proprie del sistema e i coefficienti a_n e ϕ_n vengono fissati a partire dalle condizioni iniziali e sono delle costanti durante l’evoluzione temporale. Volendo perseguire la costruzioni di soluzioni non dinamiche ma dipendenti dal tempo, possiamo variare i seguenti parametri (in generale ad ogni istante temporale):

- le ampiezze a_n relative di ciascun modo,
- e le fasi ϕ_n .

Evidenziamo il fatto che i vari istanti temporali su cui è stata costruita la soluzione – che verranno denominati “frame” per ben distinguere la non dinamicità della soluzione stessa – possono essere permutati per ottenere altre soluzioni del tutto equivalenti: sono stati utilizzati, per la costruzione di ogni soluzione pseudo-temporale, un totale di 3000 frame.

Approccio iniziale. Iniziamo il procedimento mantenendo un andamento di base armonico dei coefficienti $A_n(t)$ scegliendo i parametri:

- a_n diversi per ogni soluzione ma costanti nel tempo per la stessa;
- $\phi_n(t)$ estratti ad ogni frame da una opportuna distribuzione.

Si perde, già in questo caso, il legame diretto con la dinamica del sistema tramite l’introduzione di un rumore aggiuntivo, come verrà meglio spiegato nella Sez. 6.2.4.

Generalizzazione. La successiva generalizzazione è quella di estrarre il coefficiente complessivo $A_n(t)$ da una opportuna distribuzione in maniera casuale ad ogni frame temporale. Ciò implica associare al modo normale $\mathbf{m}_n(\mathbf{r})$ un coefficiente temporale che non vibra alla frequenza propria associata. Questa scelta, rappresentativa del caso più generale in cui si inserisce il damping massimo all’interno del sistema, genera in modo ovvio delle soluzioni non dinamiche: si effettua comunque tale opzione per verificare che, anche in un caso puramente geometrico e con l’unica richiesta di soddisfare l’ortogonalità dei coefficienti in Eq. (3.27), le soluzioni così generate – ai fini del calcolo della correlazione – sono adatte allo scopo di validazione.

Legame con la fisica del sistema. Il quesito da porsi è quindi se anche queste soluzioni, non dinamiche per costruzione, possano essere descrittive di un campo sismico. Tanto nel primo quanto nel secondo approccio, tra tutte le scelte possibili dei coefficienti esisteranno:

1. un sottoinsieme di questi che ben rappresentano un rumore sismico reale;
2. un sottoinsieme di questi in cui è garantita la validità della condizione di ortogonalità in Eq. (3.27) che equivale alla corrispondenza tra la correlazione costruita a partire dalle soluzioni pseudo-temporali e la media pesata dei modi normali.

Si devono quindi ricercare delle soluzioni caratterizzate da coefficienti che siano nell'intersezione di questi due sottoinsiemi: che assicurino, cioè, tanto l'equivalenza sopra citata quanto la buona descrizione di un rumore sismico. Nelle sezioni che seguono verranno meglio descritte le soluzioni pseudo-temporali costruite tramite MATLAB nei due stadi sopra descritti.

6.2 Approccio iniziale

6.2.1 Ampiezze uniformi

Come primo test, consideriamo le ampiezze unitarie e costanti, cioè

$$a_n = 1 \quad \forall n \in \{1, \dots, 5000\} \quad (6.1)$$

e le fasi scelte da una distribuzione gaussiana a media nulla e deviazione standard fissata, in particolare

$$\phi_n = \mathcal{N}(0, \pi/8) ; \quad (6.2)$$

la scelta della media nulla per la distribuzione gaussiana è necessaria affinché i coefficienti $A_n(t)$ rispettino la condizione di mutua ortogonalità descritta dall'Eq. (3.27), mentre i coefficienti unitari sono stati adottati per pesare tutti i modi della soluzione in egual maniera, cercando di generare una PSD piatta.

Riportiamo in Fig. 6.1 le intensità degli spostamenti in modulo della soluzione a vari frame temporali .

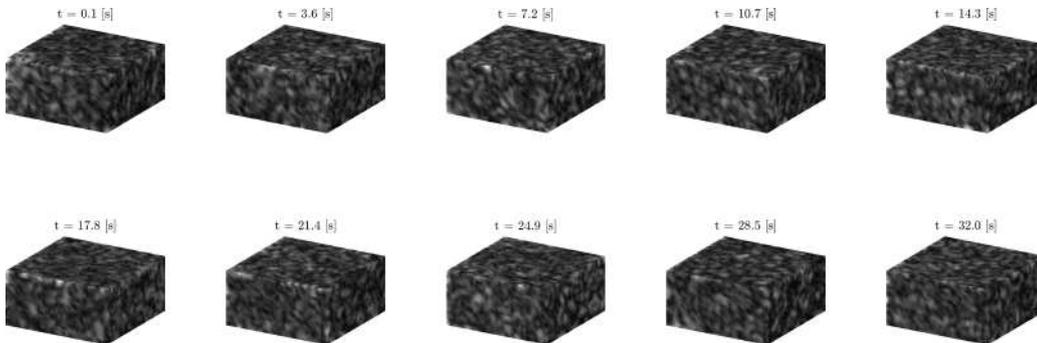


Figura 6.1 – Intensità $|\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)|$ degli spostamenti delle soluzioni pseudo-temporali costruite tramite coefficienti a_n unitari e costanti nel tempo e fasi $\phi_n(t) = \mathcal{N}(0, \pi/8)$, calcolati a diversi step temporali (frame). Si nota sia la stazionarietà della soluzione sia la casualità richiesta per il rumore.

È ben evidente come la soluzione sia stazionaria già al frame iniziale: come precedentemente discusso, questo fatto è ben spiegato dalla non dinamicità della soluzione in questione, essendo questa calcolata ad istanti temporali non correlati tra loro, in modo da riprodurre alcune proprietà statistiche quali appunto la stazionarietà e la casualità del rumore simulato. Dall'immagine in questione, non è deducibile se la sollecitazione visibile descriva un rumore bianco o meno: per poter discernere se questo sia effettivamente tale è stata costruita la corrispondente PSD (relativa a due punti presi sulla superficie a $z = 0$ del modello di test), visibile al centro in Fig. 6.2.

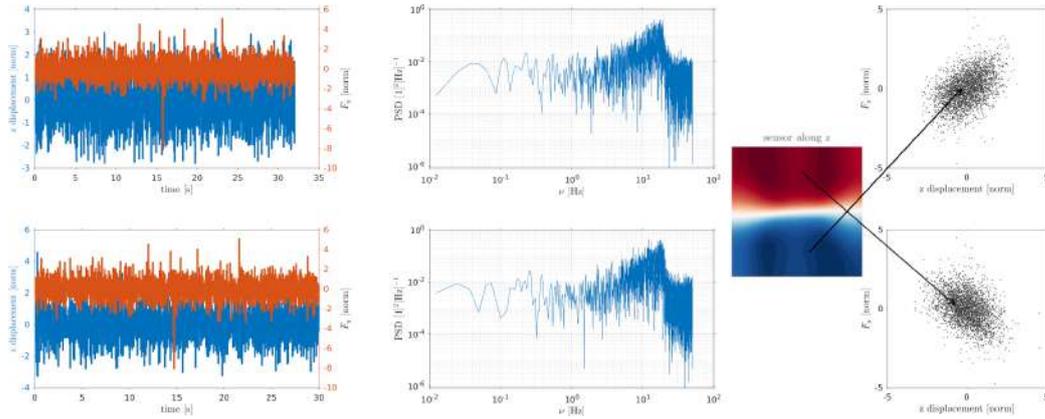


Figura 6.2 – Da sinistra verso destra: spostamento $u^z(\mathbf{r}_i, t)$ (in blu) e andamento della componente $F^y(t)$ della forza newtoniana (in rosso) in funzione del tempo; spettro in frequenza relativo allo spostamento e correlazione tra lo spostamento $u^z(\mathbf{r}_i, t)$ con la forza $F^y(t)$, tutto calcolato per due differenti punti sulla superficie a $z = 0$ – cioè $\mathbf{r}_i = (x_0, y_0, 0)$ – del modello di test. Lo spettro mostra un andamento incompatibile con il rumore bianco richiesto; risulta inoltre evidente la presenza del numero finito di modi preso in considerazione per il calcolo della soluzione ($\nu_{\max} \approx 18$ Hz).

Lo spettro risulta piatto a basse frequenze ma, a quelle più alte, mostra una crescita: infatti, i modi ad alta frequenza (a causa della loro alta degenerazione) danno maggiore contributo (avendo scelto $a_n = 1$). Risulta anche evidente il “taglio” dovuto alla presenza di un numero finito di modi di vibrazione: si sono infatti generati 5000 modi normali, per una frequenza massima di circa 18 Hz (al di sopra di tale valore non si hanno contributi rilevanti nello spettro, ma solo puro rumore dovuto alla fase gaussiana).

Mappe di correlazione. Di seguito si riportano le mappe di correlazione visibili in Fig. 6.3 ricavate dalla soluzione pseudo-temporale presa in considerazione, avente ampiezze uniformi: si nota un buon accordo – quantomeno qualitativo – con le mappe di sensitività in Fig. 5.6 trovate tramite la media pesata in Eq. (3.25) con coefficienti $a_n = 1 \implies w_n = 1$ adattata al modello di test 3D con componenti $i = z$ e $j = y$. Il rumore aggiuntivo presente in background nelle figure in questione, è dovuto a vari fattori:

1. numero finito di modi di vibrazione presi in considerazione;
2. scelta della fase da una distribuzione gaussiana;
3. numero limitato di frame temporali.

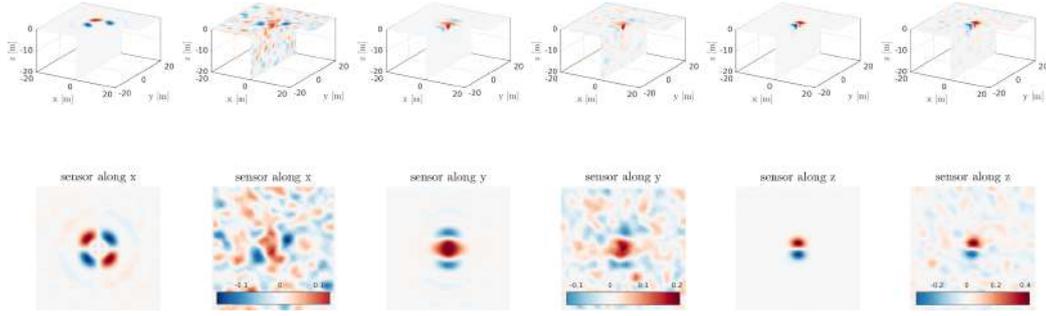


Figura 6.3 – Mappe di correlazione ricavate dalla soluzione pseudo-temporale con $a_n = 1$ e $\phi_n = \mathcal{N}(0, \pi/8)$.

Un'analisi più dettagliata sull'effetto di ciascuna delle variabili sopra elencate verrà effettuata nel seguito della trattazione.

6.2.2 Ampiezze in funzione della densità modale

Il comportamento della PSD mostrato in Fig. 6.2 non rispecchia le caratteristiche di rumore bianco richieste: tentiamo di modificare pertanto, in maniera opportuna, l'andamento dello spettro della soluzione andando ad ottimizzare la scelta dei coefficienti a_n , variabili in funzione del numero modale n ma tenuti costanti per tutti i frame temporali. In virtù di quanto già dedotto nella Sez. 5.3.2 del precedente capitolo sull'andamento della densità dei modi di vibrazione in funzione della frequenza (Fig. 5.7b), si è scelto di rendere i coefficienti a_n proporzionali alla densità modale secondo la relazione

$$a_n \propto \left(\frac{dn}{df} \right)^{-\frac{1}{2}}, \quad (6.3)$$

come ulteriore ottimizzazione, al fine di contrastare la degenerazione dei modi ad alta frequenza. Le fasi, invece, verranno sempre estratte ad ogni frame temporale da una gaussiana a media nulla e deviazione standard fissata: $\phi_n = \mathcal{N}(0, \pi/8)$. Riportiamo, in maniera del tutto analoga alla soluzione precedente, le intensità degli spostamenti generati in Fig. 6.4, i quali risultano con pattern analogo al caso avente $a_n = 1$.

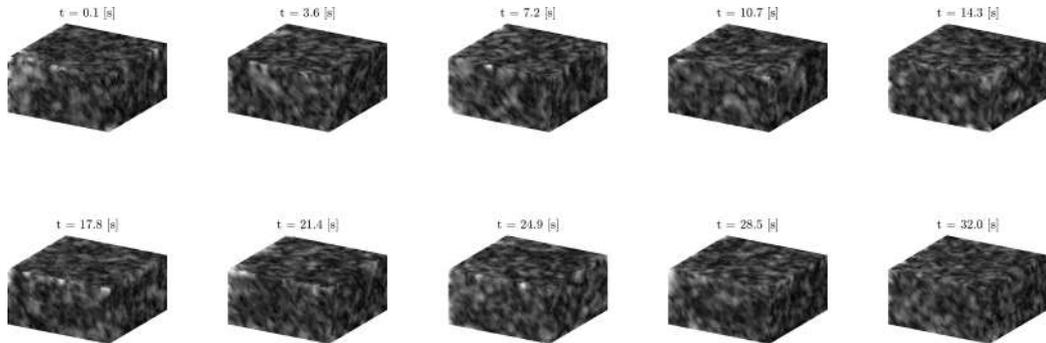


Figura 6.4 – Intensità $|\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)|$ degli spostamenti delle soluzioni pseudo-temporali costruite tramite coefficienti $a_n \propto (dn/df)^{-1/2}$ e fasi $\phi_n(t) = \mathcal{N}(0, \pi/8)$, calcolati a diversi step temporali (frame). Si nota sia la stazionarietà della soluzione sia la casualità richiesta per il rumore.

Riportiamo anche il corrispondente andamento dello spettro in Fig. 6.5, il quale risulta appiattito a frequenze elevate e con alcuni modi di maggiore intensità a basse frequenze.

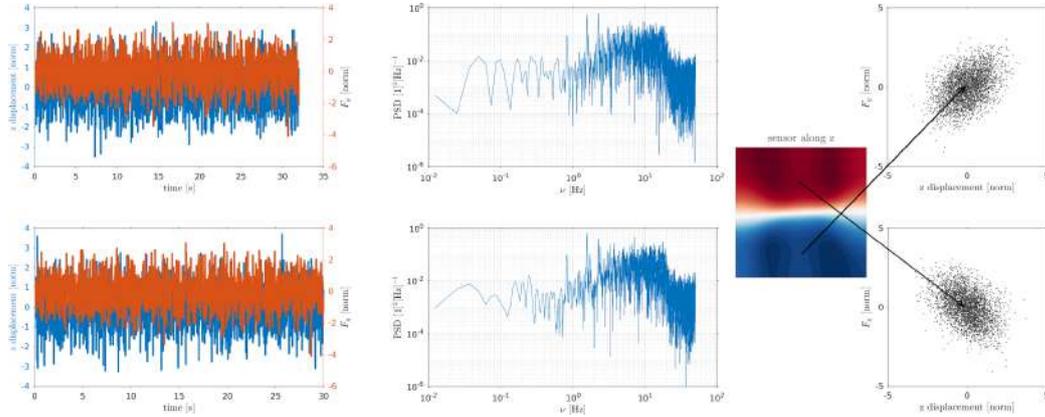


Figura 6.5 – Da sinistra verso destra: spostamento $u^z(\mathbf{r}_i, t)$ (in blu) e andamento della componente $F^y(t)$ della forza newtoniana (in rosso) in funzione del tempo; spettro in frequenza relativo allo spostamento e correlazione tra lo spostamento $u^z(\mathbf{r}_i, t)$ con la forza $F^y(t)$, tutto calcolato per due differenti punti sulla superficie a $z = 0$ – cioè $\mathbf{r}_i = (x_0, y_0, 0)$ – del modello di test. Si nota un andamento maggiormente appiattito dello spettro alle frequenze elevate, ed una maggiore intensità di alcuni modi a basse frequenze.

Mappe di correlazione. In Fig. 6.6 si riportano le mappe di correlazione ottenute dalla soluzione pseudo-temporale corrente, avendo pesato i coefficienti a_n secondo la densità dei modi di vibrazione: analogamente alla soluzione per gli $a_n = 1$ otteniamo un pattern – sempre qualitativamente – simile alle mappe di sensitività caratterizzate da opportuni pesi w_n tali da essere rappresentativi di un andamento dei coefficienti in $a_n \propto (dn/df)^{-1/2}$

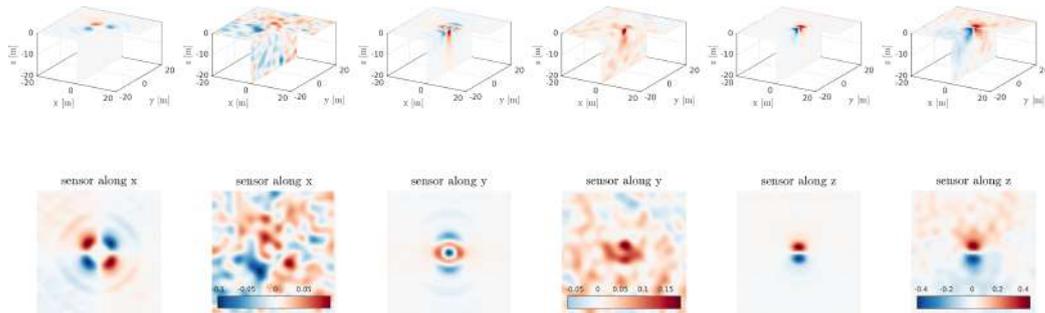


Figura 6.6 – Mappe di correlazione ricavate dalla soluzione pseudo-temporale con $a_n \propto (dn/df)^{-1/2}$ e $\phi_n = \mathcal{N}(0, \pi/8)$.

6.2.3 Analisi e confronto delle mappe di correlazione in 3D

Dalle due soluzioni pseudo-temporali costruite precedentemente, effettuiamo ora un confronto tra le corrispettive mappe di correlazione che, per buona visione del lettore, andiamo a riportare in Fig. 6.7 solamente nel taglio a $z = 0$.

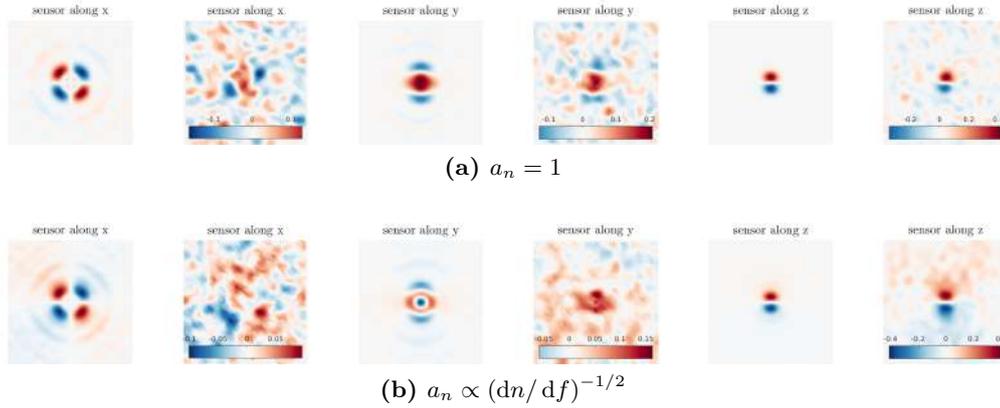


Figura 6.7 – Confronto tra le mappe di correlazione (sulla sezione a $z = 0$) ricavate dalle soluzioni pseudo-temporali: in 6.7a mantenendo i pesi dei modi costanti ed unitari; in 6.7b prendendo in considerazione l'andamento della densità dei modi per i coefficienti. Per ogni coppia di immagini si ha, a sinistra, la mappa di sensitività derivante dalle soluzioni modali in ANSYS mentre, a destra, la corrispondente mappa di correlazione ottenuta tramite le soluzioni pseudo-temporali.

Per maggiore chiarezza elenchiamo le caratteristiche che scaturiscono dal confronto presentato in Fig. 6.7:

- ☉ utilizzando i coefficienti a_n proporzionali alla densità dei modi (Fig. 6.7b) – fatto che porta un minor contributo dei modi ad alta frequenza – si perde in risoluzione spaziale ed in rapporto segnale-rumore (SNR), fatto atteso e presente anche nelle mappe di sensitività corrispondenti;
- ☉ la mappa di sensitività lungo la direzione \hat{z} è quella che presenta il miglior rapporto SNR – motivo per cui risulterà essere quella utilizzata per le analisi seguenti –. Vi sono due principali motivi per giustificare tale effetto:
 - i) uno spostamento sulla superficie lungo \hat{z} ha un impatto molto più importante sulla forza newtoniana, in quanto avvicina/allontana massimamente la massa dm presa in considerazione nello spostamento rispetto alla massa di test (si ha quindi una variazione del segnale più intensa);
 - ii) sulla superficie si hanno le onde di Rayleigh (si veda per maggiori dettagli il paragrafo 2.1) che si muovono su un piano verticale, quindi contenente \hat{z} ed, inoltre, la direzione di propagazione dell'onda stessa¹.

La rumorosità che caratterizza entrambe le soluzioni pseudo-temporali – sia optando per coefficienti $a_n = 1$ sia scegliendo $a_n \propto (dn/df)^{-1/2}$ – è attesa, in quanto la fase viene estratta da un processo casuale gaussiano a deviazione standard fissata: è necessario quindi indagare quale sia il ruolo della fase al rumore.

¹Si tenga presente che in una qualsiasi soluzione pseudo-temporale, per come viene costruita, non viene privilegiata in alcun modo la superficie a $z = 0$, cosa che invece avverrebbe in una soluzione dinamica come diretta conseguenza del contributo delle onde di Rayleigh sulla superficie. Nel caso esistesse – nelle soluzioni non dinamiche – un qualche privilegio di tale superficie, sarebbe una caratteristica intrinseca dei modi del sistema.

6.2.4 Ruolo della fase

Si vuole, come anticipato, studiare un po' più a fondo il comportamento della PSD della forza newtoniana al variare della fase. Ricordando quanto descritto nella Sottosez. 3.1.1, sotto l'ipotesi di piccole oscillazioni, una generica componente $F_n^j(t)$ della forza ha (al prim'ordine) lo stesso andamento temporale del singolo modo $\mathbf{m}_n^i(\mathbf{r}, t)$ del sistema, secondo la relazione (3.8). A questo scopo, facciamo uso della somma $S(t)$ definita come

$$S(t) = \sum_{n=1}^N \cos(2\pi \tilde{f}_n t + \phi_n), \quad (6.4)$$

la quale rappresenta una funzione di test che “mima” l'andamento nel tempo dei modi di vibrazione del sistema, in cui si è definita con \tilde{f}_n la frequenza propria del modo normale n -imo. Si vuole indagare il comportamento di tale funzione, sia in tempo che in frequenza, al variare della fase ϕ_n estratta a sua volta da una distribuzione gaussiana a media nulla e con una deviazione standard nota $\mathcal{N}(0, \sigma)$.

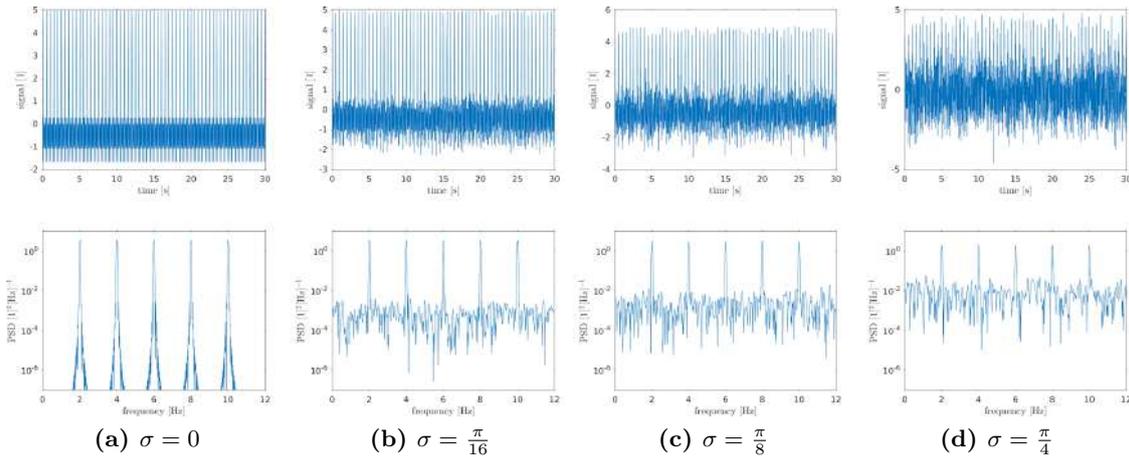


Figura 6.8 – Andamento del segnale della PSD delle soluzioni pseudo-temporali al variare della deviazione standard della distribuzione $\mathcal{N}(0, \sigma)$ dalla quale è estratta casualmente la fase.

Nel caso semplice in cui la fase venga estratta da una distribuzione del tipo $\mathcal{N}(0, 0)$ (e quindi risulti identicamente nulla) la funzione in Eq. (6.4) descrive, in modo ovvio, un pettine di frequenze come rappresentato in Fig. 6.8a: uno spettro di questo tipo è atteso nel caso ideale in cui ogni singolo modo del sistema vibri alla propria autofrequenza \tilde{f}_n , in maniera indipendente da tutti gli altri. Si nota, (in ordine crescente dalla Fig. 6.8b alla 6.8d) all'aumentare della deviazione standard della distribuzione dalla quale viene estratta la fase della funzione di test, un rumore aggiuntivo² all'andamento del pettine di frequenze in background: tanto più è elevata la σ (e quindi la “larghezza” della distribuzione) tanto più la fase dalla quale viene estratta modula il pettine di frequenze, e quindi aumenta – in intensità – il rumore additivo, con andamento tendente verso lo spettro di rumore bianco (ben atteso per il rumore sismico in questione). Quest'ultima configurazione è prevista nel caso reale in cui i modi normali di vibrazione perdano

²Questo rumore di fase mantiene le caratteristiche dello spettro (pettine di frequenze).

la loro indipendenza ovvero, in modo equivalente, si abbia una dispersione (damping) all'interno del sistema³

Dalla Fig. 6.8 si evidenzia, quindi, come “giocando” con la σ della distribuzione – e quindi con la fase ϕ_n dalla quale viene estratta – si possa ottenere una PSD della forza newtoniana rappresentativa del rumore sismico cercato.

6.2.5 SNR vs frame

Ci aspettiamo ragionevolmente che anche il numero di frame con il quale si decide di costruire la soluzione pseudo-temporale influisca sul SNR della mappa di correlazione: il rapporto segnale-rumore viene calcolato, scelta una opportuna regione di interesse (ROI) – si veda, ad esempio, la Fig. 6.9a relativamente alla ROI con i sensori disposti lungo \hat{z} –, valutando il modulo della correlazione nella regione di interesse stessa in rapporto alla deviazione standard calcolata al di fuori della ROI, cioè

$$\text{SNR} = \frac{\langle |C| \rangle_{\text{ROI}}}{\sigma_C|_{\text{ROI}}} . \quad (6.5)$$

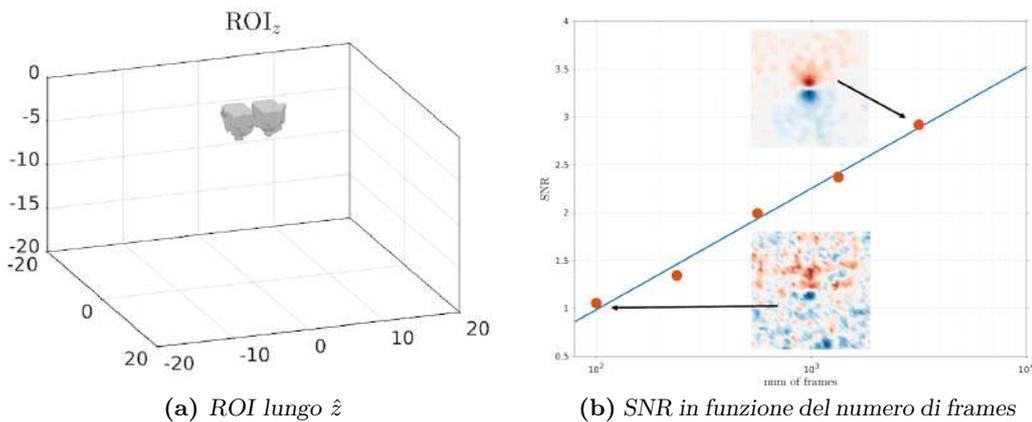


Figura 6.9 – A sinistra: la regione di interesse (in grigio) sulla quale si calcola il segnale, mentre il rumore valutato in tutta la zona bianca (ossia al di fuori della ROI). A destra: grafico del rapporto SNR che evidenzia un netto miglioramento all’aumentare del numero di frame.

Come mostrato in Fig. 6.9b la soluzione pseudo-temporale tende a migliorare il suo rapporto segnale-rumore all’aumentare del numero dei frame (ossia integrando per più tempo) e quindi le corrispettive mappe di correlazione si avvicinano sempre di più al pattern della derivata: le fluttuazioni di fondo visibili sono “finte”, cioè scaturiscono solamente per via del numero finito di frame; aumentandone il numero, tali fluttuazioni diminuiscono tendendo a ripulire la mappa.

6.3 Generalizzazione

A questo punto, come già accennato ad inizio capitolo, si vuole generalizzare la procedura estraendo direttamente i coefficienti $A_n(t)$ da una opportuna distribuzione simulando,

³L’effetto di damping cercato è riprodotto, nel caso preso in considerazione, tramite l’aumento della deviazione standard σ nella distribuzione $\mathcal{N}(0, \sigma)$; risulta chiaro che si può giungere al medesimo risultato anche attraverso scelte differenti.

così, il caso più generale in cui il sistema venga caratterizzato da damping massimo, e che quindi sia contraddistinto dalla più elevata dipendenza tra i suoi modi di vibrazione⁴.

6.3.1 Coefficienti casuali gaussiani

Volendo comunque contrastare l'effetto di degenerazione dei modi ad alta frequenza, estraiamo ad ogni frame temporale i coefficienti $A_n(t)$ da gaussiane a media nulla, con deviazione standard proporzionale alla densità dei modi:

$$A_n(t) = \mathcal{N}(0, \sigma_n), \quad \sigma_n \propto \left(\frac{dn}{df}\right)^{-\frac{1}{2}}. \quad (6.6)$$

Chiaramente la scelta di distribuzioni normali a media nulla continua a garantirci la mutua ortogonalità tra i coefficienti $A_n(t)$ stessi; quella per la deviazione standard, invece, permette una corretta “pesatura” dei modi in maniera *statistica*: è chiaro che, essendo ogni estrazione casuale, vi è la possibilità che un modo ad alta frequenza possa, ad esempio, venire pesato maggiormente (prendendo un valore nelle code della gaussiana) ma questo avviene con bassa probabilità.

Abbiamo quindi riportato in Fig. 6.10 la mappa di correlazione associata ad una estrazione gaussiana dei coefficienti modulata come sopra descritto.

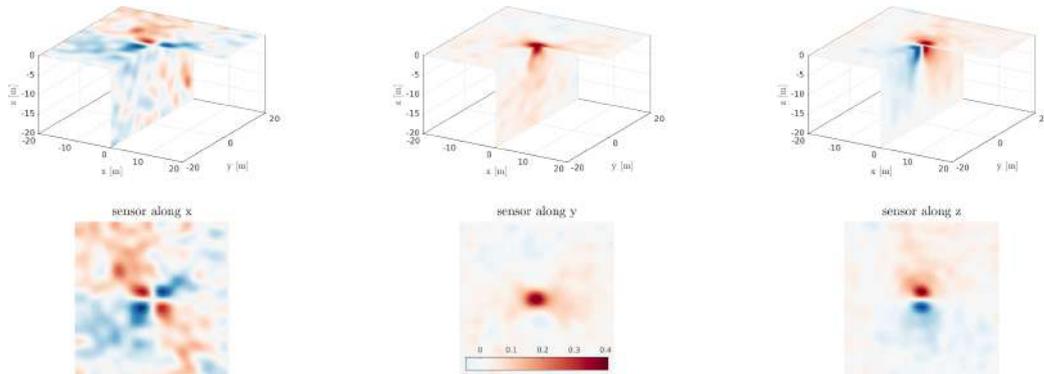


Figura 6.10 – Mappe di correlazione ricostruita tramite coefficienti $A_n(t)$ estratti da una distribuzione gaussiana $\mathcal{N}(0, \sigma_n)$, con $\sigma_n \propto (dn/df)^{-1/2}$.

Appare abbastanza evidente che gli andamenti di queste mappe sono estremamente simili ai pattern teorici in Fig. 5.3, nonostante la scelta in Eq. (6.6) non sia ispirata ad un processo fisico particolare.

Prospettive. Il fatto che questo approccio, puramente matematico, porti a risultati qualitativamente coerenti con i pattern derivativi attesi (e quindi con le mappe di sensitività) seppur con le differenze già esplicitate nella Sottosez. 6.2.3, ci rende fiduciosi nella bontà del metodo utilizzato.

Infatti, nonostante i pattern teorici identifichino il caso ideale, in cui tutti i punti del sistema sono eccitati in maniera indipendente da infiniti modi di vibrazione del sistema – soggetti allo stesso peso –, la loro somiglianza rispetto alle mappe trovate

⁴L'estrazione dei coefficienti $A_n(t)$ da una distribuzione del tipo $\mathcal{N}(0, \sigma_n)$ è solamente una delle tante scelte possibili per ricreare la condizione più generale di massimo smorzamento del sistema mantenendo la condizione di ortogonalità richiesta.

conferma che (quantomeno per il modello di test effettuato⁵) siamo prossimi ad una buona riproduzione della soluzione.

Come secondo accorgimento i risultati ottenuti ci fanno ben supporre che, tra tutte le soluzioni possibili che si possono generare estraendo in modo più o meno casuale i coefficienti temporali $A_n(t)$, ve ne siano quantomeno un sottoinsieme atte a riprodurre l'andamento di un campo sismico, in quanto ben rappresentative di un rumore casuale con spettro piatto. Ovviamente, l'estrazione dei coefficienti $A_n(t)$ da una distribuzione gaussiana a media nulla non è l'unica scelta possibile per ottenere le caratteristiche del rumore ricercate: siamo confidenti nel fatto che qualsiasi altro metodo, a patto che soddisfi le condizioni di ortogonalità trovate, riproduca l'andamento qualitativo dei pattern teorici. Abbiamo quindi buone basi per supporre che qualsiasi soluzione dinamica reale – che ben riproduca il campo sismico – abbia un comportamento simile. Appare però evidente che, nel caso in cui la soluzione temporale reale non soddisfi i requisiti di ortogonalità richiesti, anche le regioni di interesse (e quindi le zone maggiormente informative della mappa di correlazione) potrebbero variare. Nel capitolo seguente si proverà quindi a confrontare quanto ottenuto con l'unica “vera” soluzione temporale a nostra disposizione.

⁵Risulta chiaro che cambiando il modello, in particolare andando ad inserire elementi strutturali quali edifici, oppure proprietà del terreno differenti, le mappe informative non potranno più essere confrontate con i pattern teorici derivativi.

CAPITOLO 7

VALIDAZIONE E DISCUSSIONE

7.1 Soluzione temporale

Volendo effettuare un paragone in maniera del tutto analoga a quanto svolto per il caso 1D, si dovrebbe generare almeno una soluzione temporale rappresentativa di un campo di rumore sismico, dalla quale ottenere una mappa di correlazione da porre a confronto con le mappe di sensitività ricavate dalla media pesata di modi normali. Questo per validare l'ipotesi che, in entrambi i casi, sia contenuto – almeno qualitativamente – lo stesso tipo di informazione sulla forza newtoniana. Finora, infatti, è stato fatto un raffronto solamente con le mappe discendenti dalle soluzioni pseudo-temporali da noi create.

Facendo uso del modello di test costruito in ANSYS – già descritto nella Sez. 5.1 – è stata generata, quindi, una simulazione nel tempo idealmente atta a riprodurre il rumore sismico di background.

Simulazione campo sismico. Come già descritto nella Sez. 5.1 la simulazione di un campo di rumore sismico reale non è affatto ovvia e scontata, soprattutto se deve essere effettuata tramite un modello costruito su un software che utilizza il metodo a FE (per maggiori dettagli su prestazioni e caratteristiche del metodo si faccia riferimento al Cap. 4). Possiamo infatti conoscere la struttura di tale rumore solamente nel caso sia noto il suo spettro in ogni punto del sistema, o comunque in modo denso rispetto allo stesso. Non disponendo di tali informazioni si può ipotizzare che la PSD in questione sia ben rappresentata da uno spettro piatto in tutti i punti del sistema. Come primo approccio per la simulazione del rumore sismico, si sono implementate all'interno del modello 100 forze puntuali con densità uniforme nello spazio, caratterizzate da direzione casuale ed ampiezza $f_n^j = \text{cost}$, distribuite poissonianamente nel tempo¹, con un valore medio $\mu = 1$ s.

In Fig. 7.1 è riportato il modulo delle intensità degli spostamenti ottenuto dalla soluzione temporale in ANSYS sopra descritta (dal nero al bianco si evidenziano gli spostamenti rispettivamente da nullo a massimo) in un intervallo di tempo di ≈ 30 s.

¹Tale scelta per la simulazione di un capo sismico è soltanto una tra le possibili che si possono effettuare: proprio questo punto sarà oggetto di discussione nel prosieguo del capitolo.

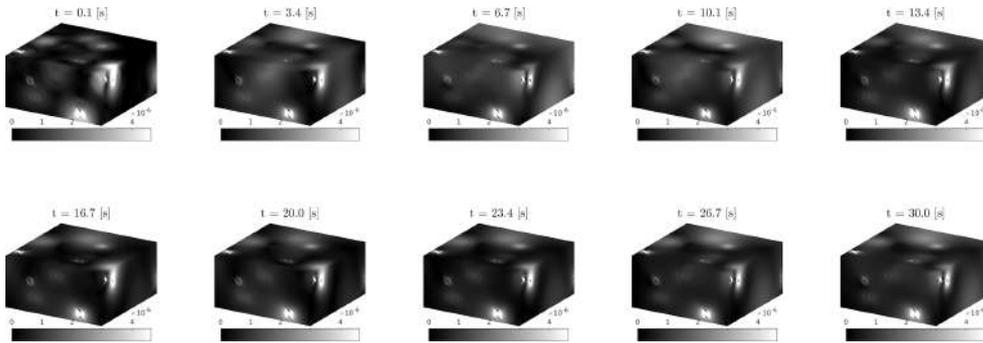


Figura 7.1 – Soluzione temporale generata da ANSYS avendo implementato come sollecitazioni 100 forze puntuali con direzione casuale con densità uniforme nello spazio, distribuite in modo poissoniano nel tempo ($\mu = 1$ s): si visualizza il modulo delle intensità degli spostamenti nell'intervallo temporale (0 ÷ 30) s, evidenziando il comportamento non causale delle eccitazioni.

Si mette in luce, in particolar modo, il comportamento non casuale delle sorgenti implementate: tale caratteristica, del tutto inaspettata, ci porta a voler analizzare in modo maggiormente approfondito le proprietà di questa soluzione in modo da verificare se questa descriva la tipologia di rumore richiesta.

7.1.1 Comportamento dei coefficienti temporali

Andiamo per prima cosa a verificare le proprietà di stazionarietà della soluzione.

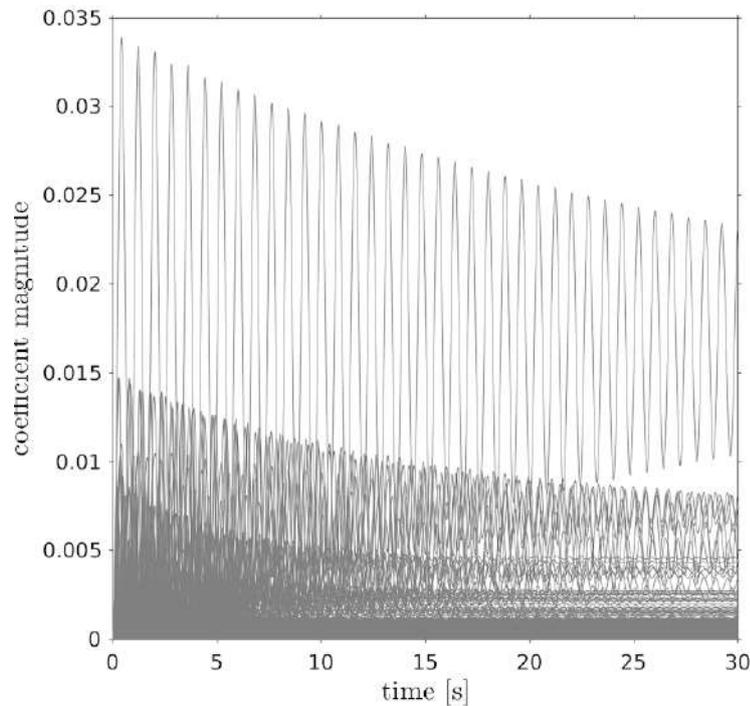


Figura 7.2 – Andamento temporale dei coefficienti $A_n(t)$ presenti nella decomposizione $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = \sum_n A_n(t) \mathbf{m}_n(\mathbf{r})$ sulla soluzione modale di ANSYS. Si evidenzia il comportamento instabile dell'involuppo dell'oscillazione che implica la non stazionarietà della soluzione temporale.

A tal fine si è riportata in Fig. 7.2 l'andamento temporale dei coefficienti $A_n(t)$ ricavati dalla decomposizione in Eq. (3.2), essendo $\mathbf{m}_n(\mathbf{r})$ i modi generati dalla soluzione modale di ANSYS analizzata nel Cap. 5.

Si evidenzia il comportamento decrescente dell'involuppo dell'oscillazione dei coefficienti della decomposizione, il quale implica la non stazionarietà della soluzione temporale in esame: la caratteristica di stazionarietà, infatti, sarebbe confermata da una ampiezza costante dell'oscillazione, requisito qui non presente (almeno per il tempo di simulazione effettuato).

Nonostante la soluzione non possieda la proprietà richiesta, volgiamo verificare – quantomeno per una validazione interna del metodo – che tale soluzione (unica temporale a nostra disposizione) soddisfi le condizioni di ortogonalità espresse in Eq. (3.27) affinché sia confermata la corrispondenza tra mappe di correlazione e mappe di sensitività. A questo proposito abbiamo calcolato la matrice dei prodotti scalari dei coefficienti $A_n(t)$ riprodotta in Fig. 7.3, attendendoci un risultato soddisfacente la condizione:

$$1 \approx \mathbb{E}[A_n^2(t)] \gg \mathbb{E}[A_n(t)A_m(t)] \approx 0, \quad \text{con } n \neq m. \quad (7.1)$$

Da uno sguardo attento si può notare come, calcolando i termini della matrice a partire dalla relazione

$$\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} A_n(t)A_m(t) dt, \quad (7.2)$$

il requisito di ortogonalità sia lontano dall'essere verificato: si trovano, infatti, dei termini non nulli off-diagonal.

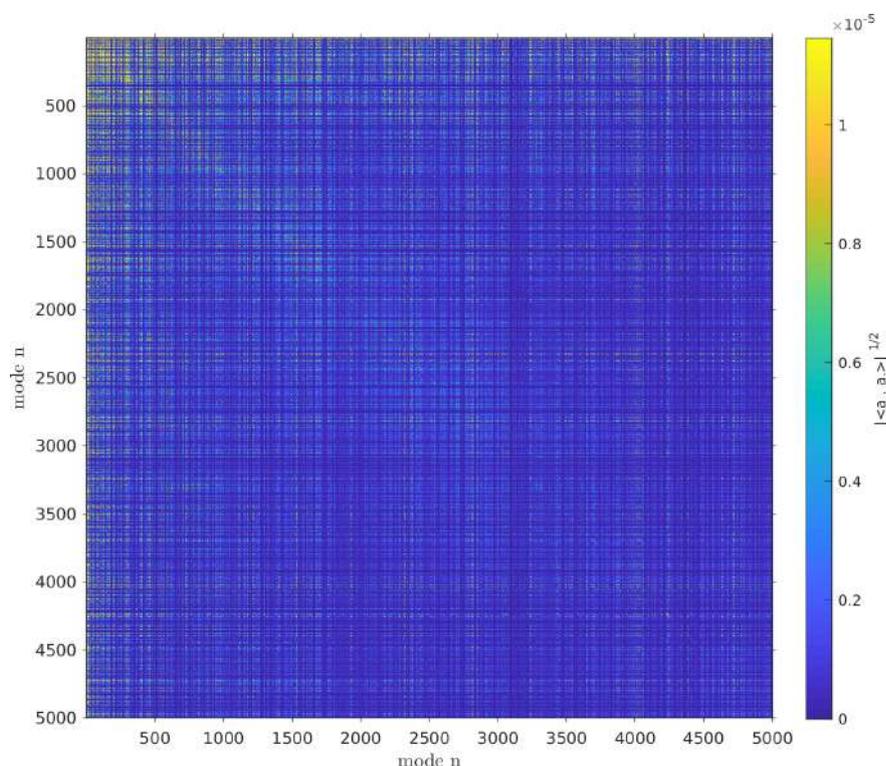


Figura 7.3 – Matrice dei prodotti scalari dei coefficienti $A_n(t)$ provenienti dalla soluzione temporale. Si nota la presenza di contributi non nulli fuori diagonale.

Data l'incongruenza con la condizione in Eq. (7.1) richiesta dalla teoria, vogliamo analizzare nello specifico l'andamento della PSD della soluzione temporale per verificare se effettivamente quest'ultima soddisfa quantomeno le caratteristiche desiderate per lo spettro di rumore cercato: nel caso in cui questo non sia verificato, avremmo la conferma che la soluzione temporale generata non sia affatto rappresentativa di un campo sismico. In Fig. 7.4, in particolare nella colonna centrale, è riportata la PSD relativa a due punti (uno di massima correlazione e l'altro di massima anti-correlazione) situati sulla superficie a $z = 0$ del modello. L'andamento dello spettro è ben lontano dalle caratteristiche richieste per un rumore bianco: oltre ad un andamento complessivo decrescente si evidenziano, inoltre, picchi importanti a frequenze specifiche, associati a modi dominanti nella soluzione. Questo fatto si ripercuote sulla mappa di correlazione (a destra della PSD relativa alla Fig. 7.4) che mostra zone di maggiore interesse su quasi tutto il piano, lontana quindi, dalle mappe di sensibilità ricavate per il confronto.

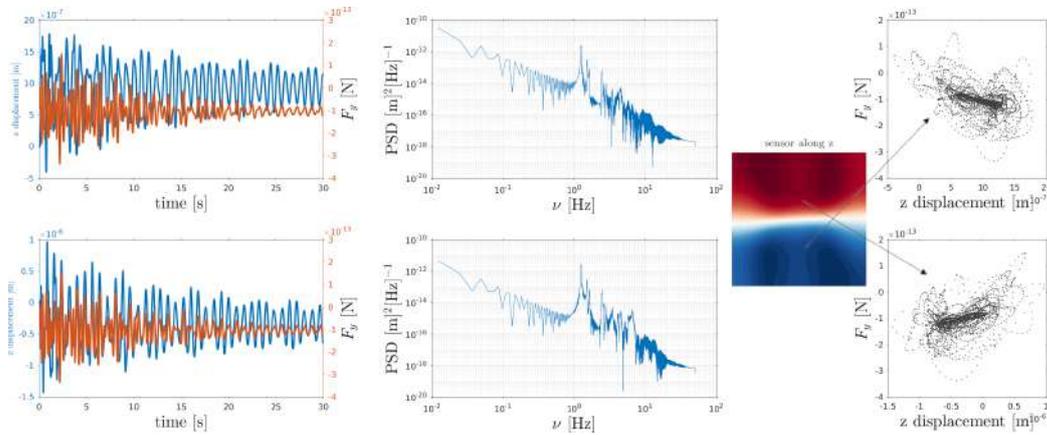


Figura 7.4 – Da sinistra verso destra: spostamento $u^z(\mathbf{r}_i, t)$ (in blu) e andamento della componente $F^y(t)$ della forza newtoniana (in rosso) in funzione del tempo; spettro in frequenza relativo allo spostamento e correlazione tra lo spostamento $u^z(\mathbf{r}_i, t)$ con la forza $F^y(t)$, tutto calcolato per due differenti punti sulla superficie a $z = 0$ – cioè $\mathbf{r}_i = (x_0, y_0, 0)$ – del modello di test. La PSD mostra un andamento discendente con la frequenza, lontano dall'andamento stimato per il rumore bianco.

Tale comportamento fa presupporre che non sia il metodo in sé ad essere inapplicabile (come si potrebbe anche ipotizzare dalla non ortogonalità dei coefficienti trovata per la soluzione²) ma solamente che questa particolare soluzione non possa essere adatta per validare il procedimento di corrispondenza tra mappe che avremmo voluto appurare: una volta in possesso di una buona soluzione rappresentativa del rumore sismico, la richiesta cruciale sarà quella di verificare se i coefficienti della decomposizione siano davvero ortogonali.

²In particolare, se il metodo richiedesse l'ortogonalità dei coefficienti, ma le “buone” simulazioni temporali dessero luogo (nella decomposizione) a coefficienti non ortogonali, il metodo non potrebbe essere applicato al sistema fisico in analisi.

7.2 Verifica interna tra soluzioni

Si vuole comunque effettuare una verifica interna, ovvero controllare che il software utilizzato generi una soluzione nel tempo – qualsiasi, non necessariamente esplicativa del rumore cercato – che sia esprimibile mediante la sovrapposizione di modi normali di Eq. (3.2). In generale, non sarebbe necessario verificare tale richiesta (in quanto soddisfatta per definizione), ma siccome vogliamo, in linea di principio, allontanarci sempre di più dalle simulazioni temporali a favore di una trattazione mediante soluzioni non dinamiche (“pseudo-temporali”) costruite tramite la sovrapposizione di modi normali del sistema considerato, una verifica risulta necessaria.

Nonostante la soluzione temporale a nostra disposizione non sia ottimale – in quanto manchi di stazionarietà e non riproduca le caratteristiche richieste per la simulazione di un rumore sismico di background già descritte nella Sez. 7.1 – andiamo comunque ad indagare il comportamento della differenza relativa (in norma) $\|\Delta\|$ ³ di questa soluzione con quella modale, all’aumentare del numero di modi di vibrazione generati:

$$\|\Delta(t)\| = \frac{|\mathbf{u}^*(\mathbf{r}, t) - \sum_{n=1}^N A_n(t)\mathbf{m}_n(\mathbf{r})|}{|\mathbf{u}^*(\mathbf{r}, t)|}. \quad (7.3)$$

Quello che ci si aspetterebbe all’aumentare del contributo in modi (secondo il principio di sovrapposizione), è di avere una convergenza delle due soluzioni: aumentando i modi di vibrazione, infatti, si dovrebbe ottenere una funzione che approssimi sempre meglio quella temporale.

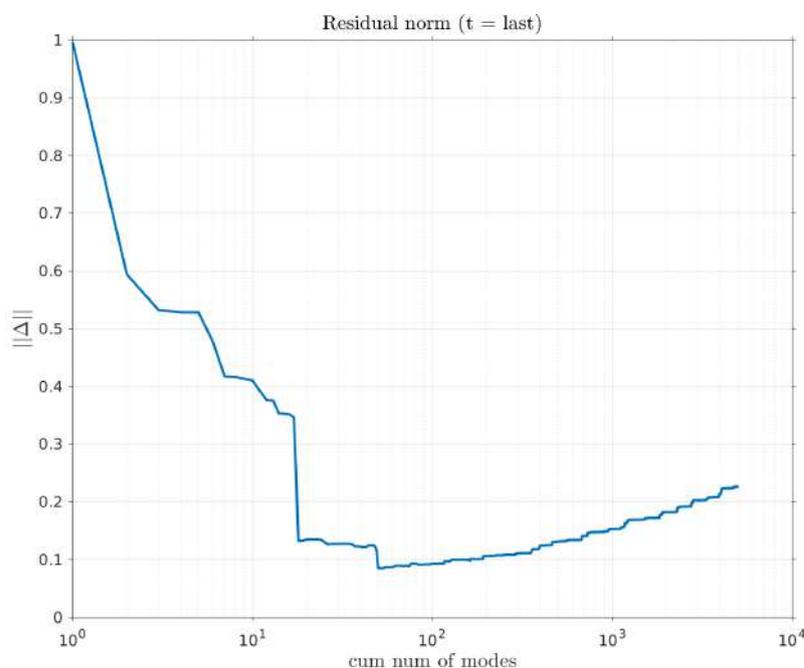


Figura 7.5 – Norma della differenza relativa tra la soluzione temporale e modale generate dal software ANSYS al variare del numero cumulativo di modi normali: comportamento inatteso all’aumentare dei modi di vibrazione utilizzati.

³Si definisce $\mathbf{u}^*(\mathbf{r}, t) = \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) - \mathbf{u}_0(\mathbf{r})$ dove $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ rappresenta l’insieme degli spostamenti lungo \hat{z} generati dalla simulazione temporale e $\mathbf{u}_0(\mathbf{r})$ descrive l’insieme delle posizioni di equilibrio dei nodi prima che venga applicata alcuna sollecitazione.

Si è evidenziato invece, in Fig. 7.5, l'andamento crescente – inatteso – del residuo calcolato al tempo t^* finale della simulazione temporale all'aumentare del numero cumulativo dei modi utilizzati. Questa tendenza pone il sospetto sulla validità della verifica: una delle cause possibili dell'andamento anomalo riscontrato potrebbe essere il comportamento non-ortogonale della base utilizzata; ciò implicherebbe che gli autovettori forniti dal software non siano ortogonali.

7.2.1 Non-ortogonalità dei modi

Di conseguenza, per essere certi di questa peculiarità, costruiamo un grafico riportante i prodotti scalari dei modi normali \mathbf{m}_n : se questi fossero effettivamente ortonormali, la matrice dovrebbe risultare interamente nulla, fatta eccezione per la diagonale principale totalmente unitaria.

A partire dai modi prodotti da ANSYS (riportiamo i primi 1000) si ottiene il grafico in Fig. 7.6a il quale presenta invece elementi off-diagonal: è stata, infatti, rimossa la diagonale unitaria per mettere in evidenza questi termini “indesiderati” altrimenti non visibili (in quanto di modulo $\ll 1$). Nella Fig. 7.6b, invece, si mette in risalto tramite un “re-scaling” dell'intensità una zona della matrice – fuori diagonale – contenente alcuni tra i prodotti scalari non nulli.

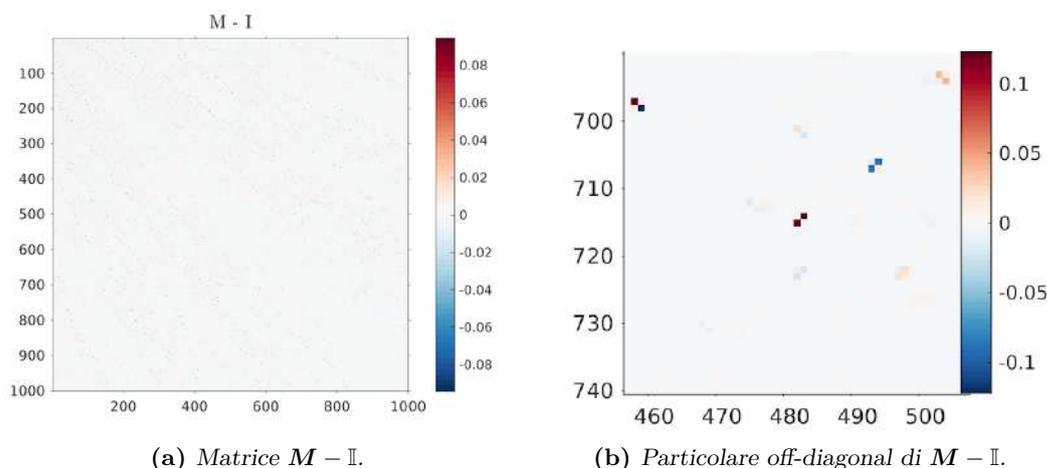


Figura 7.6 – Matrice dei prodotti scalari dei primi 1000 modi normali generati dalla soluzione modale di ANSYS (con diagonale unitaria rimossa): evidenza di termini non-diagonali (a sinistra); particolare su un termine off-diagonal (a destra).

Al fine di discernere se tale comportamento inatteso sia un effetto numerico/computazionale, sono stati effettuati alcuni test variando la finezza della mesh ed utilizzando diversi *solver* all'interno del software: le distribuzioni dei prodotti scalari tra i modi vibrazionali \mathbf{m}_n generati si trovano in Fig. 7.7, con opportuno ingrandimento della zona di maggiore interesse, cioè dove l'intensità dei termini non diagonali risulta più elevata. L'immagine riportata mette chiaramente in evidenza i seguenti fatti.

- ☉ La proprietà di ortonormalità non dipende in modo evidente dal solver usato per il calcolo della soluzione: anche un solver ad alta precisione (quello impiegato in origine era votato alla velocità) non produce apprezzabili miglioramenti⁴.

⁴La differenza tra i vari solver risiede nella diversa metodologia utilizzata per effettuare la diagonalizzazione della matrice.

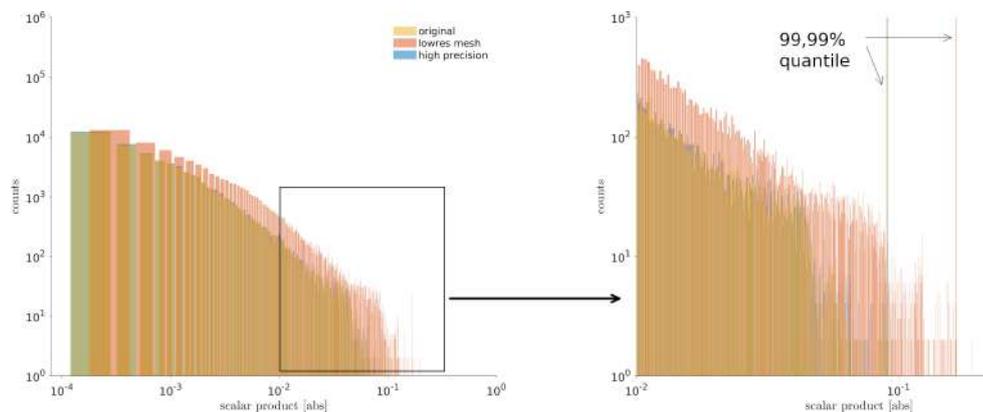


Figura 7.7 – Distribuzione degli elementi off-diagonal della matrice dei prodotti scalari dei modi normali \mathbf{m}_n : in giallo la distribuzione originale, in rosso la corrispondente ottenuta tramite una mesh meno fine e in blu quella generata per mezzo di un solver ad alta precisione.

- ☉ Di fondamentale importanza risulta, invece, il passo della mesh (ovvero il passo sul quale sono stati discretizzati i domini per il calcolo FEM): tanto più fine la si sceglie, tanto più i modi generati dal software risultano tendenti all'ortonormalità.

7.2.2 Ortogonalizzazione tramite Gram-Schmidt

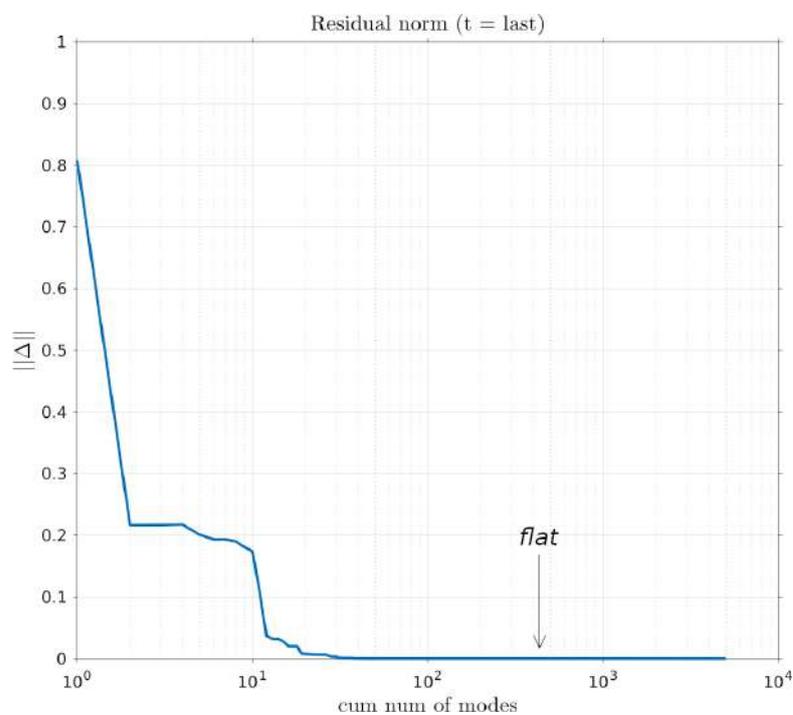


Figura 7.8 – Norma della differenza tra la soluzione temporale generata in ANSYS e quella ricostruita tramite la sovrapposizione di autovettori ortogonalizzati tramite Gram-Schmidt: notiamo un apprezzabile miglioramento nel comportamento di $\|\Delta\|$, che tende a zero all'aumentare del numero cumulato dei modi.

È stata qui effettuata una procedura di ortogonalizzazione della base modale generata da ANSYS tramite il metodo di Gram-Schmidt verificando che, in queste condizioni, il residuo in Eq. (7.3) tenda ad annullarsi all'aumentare del numero cumulativo di modi. Si è riportato in Fig. 7.8 l'andamento dello stesso che, come atteso, tende ad elidersi all'aumentare del numero cumulato dei modi.

Rimane ora da chiedersi se tale procedimento di ortogonalizzazione, che implica anche il dover ricalcolare i coefficienti temporali $A_n(t)$, abbia influenza sulle mappe di sensitività ricavate da soluzioni modali generate dalla sovrapposizione dei “nuovi” modi di vibrazione.

7.2.3 Comparazione mappe di correlazione in 3D

Ininfluenza della base. Prendendo in considerazione soluzioni pseudo-temporali (essendo l'unica soluzione temporale a nostra disposizione non adatta ad una validazione interna del metodo) in cui i coefficienti $A_n(t)$ vengono estratti ad ogni frame temporale secondo l'Eq. (6.6), ricaviamo le mappe di correlazione rispettivamente dall'uso:

- ☉ dei coefficienti originali associati ai modi normali di ANSYS,
- ☉ e da coefficienti ricalcolati sui modi ortogonalizzati tramite Gram-Schmidt.

In Fig. 7.9 si riportano a confronto tali mappe ottenute nei due casi sopra citati: si ha un ottimo accordo qualitativo nelle due situazioni analizzate, nonostante il processo di ortogonalizzazione renda la base in questione puramente geometrica, ossia non direttamente associata alla fisica del sistema scelto. Questa considerazione è dovuta al fatto che ANSYS genera delle soluzioni fisiche, in cui gli spostamenti nelle differenti direzioni non sono affatto indipendenti⁵.

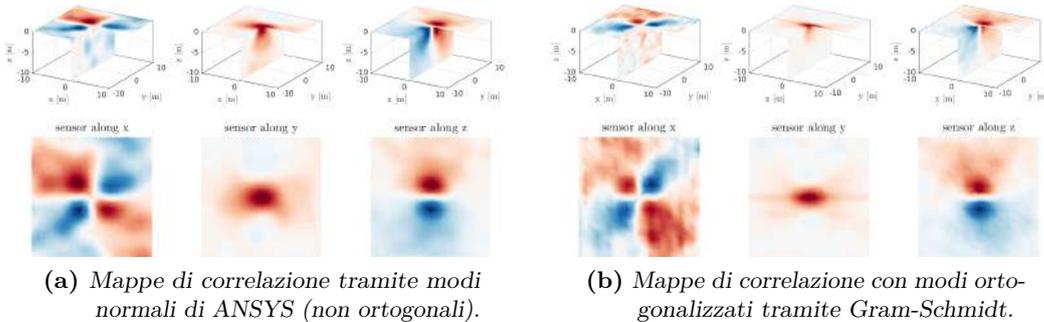


Figura 7.9 – Confronto tra le mappe di correlazione ottenute tramite l'utilizzo, in un caso, di modi normali generati da ANSYS, nell'altro dagli stessi modi ortogonalizzati.

Il procedimento di ortogonalizzazione dei modi generati dal software – in linea teorica – può avvenire solamente lungo una singola componente alla volta: appare evidente quindi come tale procedura dovrebbe basarsi su una indipendenza tra le varie componenti, qui non presente. Quando si effettua, in questa maniera “formalmente impropria” la diagonalizzazione, si stanno slegando (cioè rendendo indipendenti) le varie componenti, quindi *di fatto* si è perso il legame con la fisica (sebbene – ovviamente – i coefficienti delle forze siano stati tutti ricalcolati su questa nuova base). Il fatto, però,

⁵Ciò appare evidente – nella fisica del sistema – dalla presenza, per esempio, di un coefficiente di Poisson non nullo.

di trovare delle mappe simili ci porta ad essere ragionevolmente convinti del fatto che la scelta della base di autovettori utilizzata (anche puramente geometrica, appunto) sia ininfluente ai fini della costruzione delle mappe ricercate.

L'indipendenza delle mappe dalla base di autovettori scelti risulta di fondamentale importanza anche andando ad analizzare un ulteriore aspetto: la simulazione viene effettuata su una piccola porzione del sistema – tipicamente intorno all'edificio –, ma questa è una scelta arbitraria e si potrebbe decidere di analizzare un volume di spazio diverso; dal momento che questo, inevitabilmente, porterebbe all'uso di una base di autovettori diversa, sarebbe alquanto disdicevole ottenere mappe con andamenti nettamente diversi per l'influenza della base stessa. Il già citato fatto che le mappe appaiano indipendenti dalla scelta della base, invece, ci rende confidenti anche in questo senso: una simulazione su un volume differente (cioè variando le condizioni della simulazione in esame) dovrebbe portare a mappe con andamento analogo.

Dipendenza dal contributo in frequenza. Si osservi che la “poca definizione” presente in entrambe le mappe di Fig. 7.9 potrebbe essere dovuta alla limitatezza delle lunghezze d'onda contenute nelle simulazioni in questione.

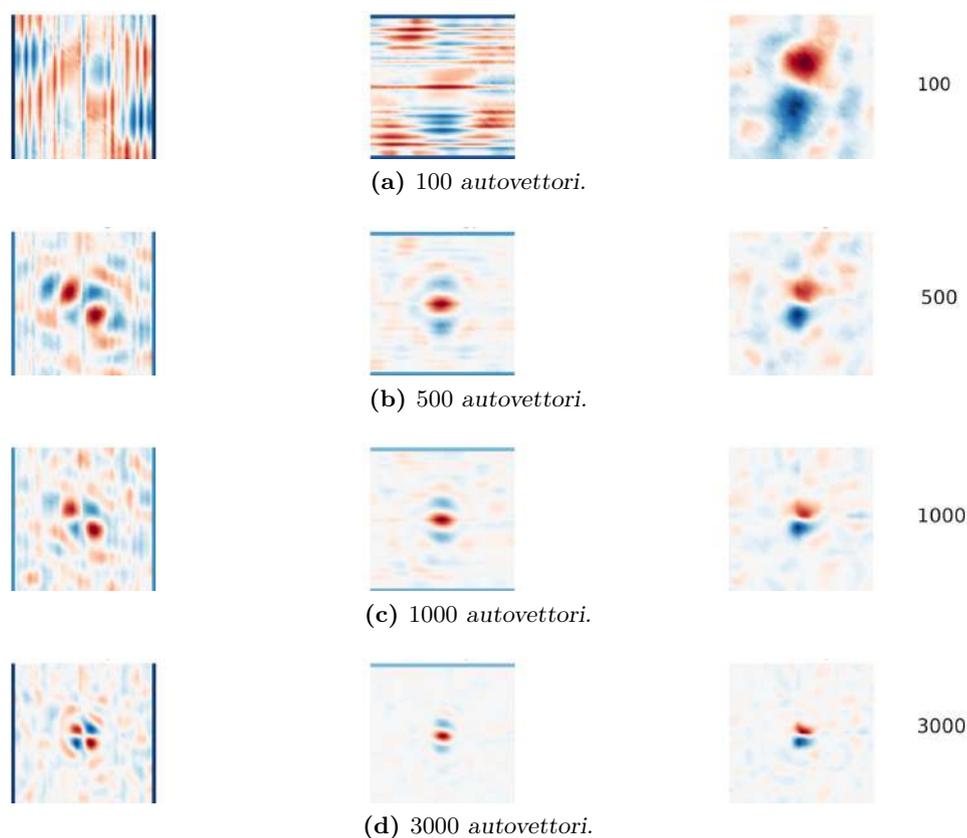


Figura 7.10 – Taglio a $z = 0$ delle mappe di correlazione ricavate dalla soluzione con i modi ortogonalizzati tramite Gram-Schmidt al variare del contributo in frequenza, ovvero del numero di autovettori: sensori posizionati rispettivamente (da sinistra verso destra) lungo \hat{x} , \hat{y} , \hat{z} .

Come conferma di questa ipotesi è stato riportato, in Fig. 7.10, un confronto delle mappe di correlazione ricavate dalla soluzione con i modi ortogonalizzati (taglio a $z = 0$) al variare del numero di autovettori – e quindi frequenze – contenute nelle simulazioni.

Appare quindi innegabile che la loro definizione sia fortemente dipendente dal contenuto in frequenza – ovvero dal numero di autovettori considerati (Fig. 7.10) – ma debolmente influenzata dalla scelta della base (Fig. 7.9).

7.3 Discussione

In conclusione si riassumono i principali risultati ottenuti nella tesi e le prospettive future da mettere in atto per poter validare – e quindi utilizzare, al fine dell’ottimizzazione della disposizione dei sensori sismici sul campo – il metodo descritto.

7.3.1 Soluzioni temporali

Come primo avviso, la soluzione temporale ricavata in Sez. 7.1, non è atta alla buona riproduzione del rumore sismico cercato: abbiamo trovato, infatti, una soluzione caratterizzata da elementi di randomicità ma non sufficienti a descrivere il sistema. Questo è dovuto alla non conoscenza dello spettro reale del rumore che tentiamo di simulare, ma anche alla difficoltà della sua riproduzione in un modello a FE. Tali circostanze generano alcuni problemi dal punto di vista della validazione:

- ❶ della corrispondenza tra soluzioni temporali e media pesata di modi normali in quanto, in mancanza di una soluzione temporale atta a rappresentare il campo sismico, non si è riusciti a ricavarne una buona mappa di correlazione per effettuare il confronto con la corrispondente mappa di sensitività costruita a partire dalla media pesata di modi in 3D;
- ❷ tra soluzioni temporali e pseudo-temporali dato che queste ultime, per come sono generate, non mettono in risalto le caratteristiche (quali le onde di superficie) che in un caso reale forniscono un importante contributo al rumore.

Nonostante le voci sopracitate, è stato mostrato come le mappe di correlazione riprodotte dalle soluzioni pseudo-temporali abbiano una buona corrispondenza (qualitativa) rispetto ai pattern derivativi teorici attesi (e di conseguenza, alle mappe derivanti dalla media pesata). Siccome l’andamento quanto più vicino ad un rumore sismico è proprio quello mostrato nei pattern teorici, possiamo affermare quanto segue:

1. la condizione di ortogonalità in Eq. (3.27) tra i coefficienti temporali trovata (e, in modo ovvio, soddisfatta dalle soluzioni pseudo-temporali) è l’unica condizione alla quale una potenziale soluzione, decomposta in modi normali, deve sottostare affinché valga l’equivalenza tra l’uso di una soluzione temporale e la media pesata di modi per il calcolo delle mappe di correlazione;
2. il fatto che l’unica soluzione temporale effettuata non soddisfi la richiesta di ortogonalità di cui sopra è interamente dovuta al fatto che essa non sia rappresentativa di un campo di rumore sismico.

Si deve, pertanto, sicuramente procedere ad un affinamento delle simulazioni temporali: si sta tutt’ora lavorando su altre modalità di inserimento dell’eccitazione all’interno della dinamica per poter avvicinarci a quella che pensiamo sia una soluzione equivalente

del campo sismico, e che si attenga quindi alle condizioni di ortogonalità quando tale soluzione viene decomposta sui modi normali del modello stabilito. Un buon punto di partenza potrebbe essere quello di prendere in considerazione, non solo 100, ma tutti i nodi (interni) del modello per le sollecitazioni, sempre puntuali con direzioni casuali, distribuite mediante una poissoniana nel tempo con un valore medio di ripetizione μ molto più basso.

7.3.2 Validazione “sul campo”

Una procedura attuabile, dopo aver validato l’approccio nell’utilizzo di medie pesate al posto di soluzioni temporali, e quindi avendo verificato che il rumore sia caratterizzato da coefficienti mutuamente ortogonali, si baserebbe su un approccio maggiormente legato all’aspetto sperimentale: avendo a disposizione – nei pressi delle masse di test di Virgo – un certo numero di sensori mono-assiali disposti lungo \hat{z} , si potrebbe seguire la linea di pensiero sotto descritta:

- ② dalla soluzione modale, si potrebbe costruire la mappa di sensitività tra un generico punto \mathbf{r}_0 e tutti gli altri punti del modello (preferibilmente sulla superficie $z = 0$), in particolare con quelli in cui sono posizionati i sensori sismici;
- ② dai dati reali dei sensori, si potrebbe calcolare la mappa di correlazione effettiva tra i medesimi punti;
- ② infine si potrebbe effettuare un confronto tra le due mappe ottenute.

La correlazione tra punti risulta fortemente influenzata dai modi normali utilizzati, i quali – a loro volta – dipendono dal sistema preso in esame e dalla modellizzazione che è stata effettuata sul sistema stesso.

Se su terreno sono presenti N sensori⁶, allora si potranno costruire mappe indipendenti in un numero pari a

$$\frac{N(N-1)}{2}; \quad (7.4)$$

queste possono essere prese in considerazione per cercare di dare adito ad un buon accordo con quelle provenienti dalle soluzioni modali: tale procedura sarebbe un ottimo feedback per stabilire la bontà del nostro modello rispetto al caso reale.

7.3.3 Modello completo e mappe di correlazione

Al fine di dare un riscontro “pratico” della trattazione effettuata si riporta, in riferimento ad un modello maggiormente realistico comprensivo di un edificio di Virgo (edificio terminale nord) (meglio descritto in App. E), la sovrapposizione tra la pianta rimodellata dell’edificio stesso e la mappa di sensitività ottenuta a partire dalla soluzione modale della geometria in questione, facendo uso di 9999 modi di vibrazione del sistema.

Nella Fig. 7.11 la mappa di sensitività viene riprodotta in scala di intensità, in cui le zone più scure corrispondono a quelle di maggiore correlazione (in modulo), in quanto non ha più importanza il segno della correlazione stessa, essendo interessati (dal punto di vista del posizionamento dei sensori) solamente all’intensità dell’informazione. Le zone maggiormente informative corrispondono a quelle sulle quali posizionare il primo sensore, e risultano essere per lo più nell’intorno del bordo esterno (appena al fuori) della piattaforma su cui poggia la torre contenete lo specchio.

⁶Nel nostro caso, si ha $N = 30$.

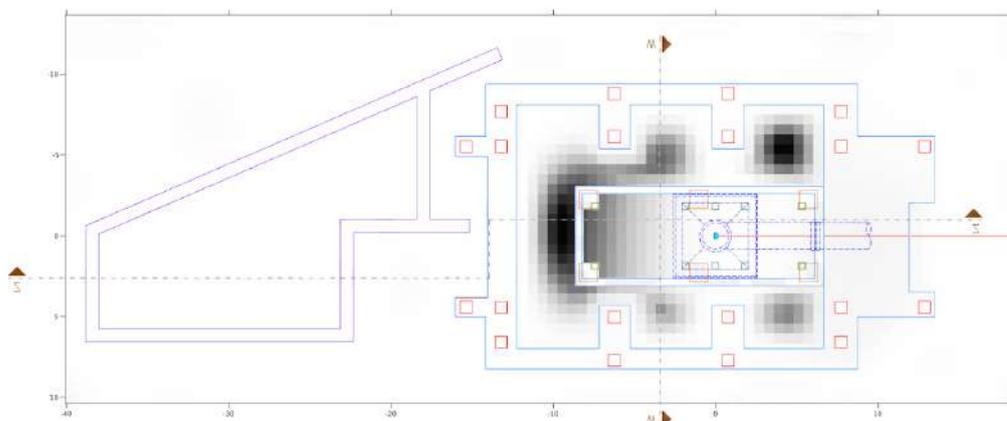


Figura 7.11 – Sovrapposizione tra la pianta (in azzurro) rimodellata del NEB di Virgo e la mappa di sensibilità costruita con 9999 modi normali derivanti dal modello realistico implementato. Le zone scure rappresentano quelle di maggior correlazione tra lo spostamento del primo sensore (lungo \hat{z}) e la forza newtoniana agente sulla massa di test.

I sensori successivi andranno posizionati, come meglio descritto nella Sez. 2.4, con un procedimento iterativo, una volta costruite anche le mappe di correlazione tra coppie di sensori.

CAPITOLO 8

CONCLUSIONI

Attraverso questo lavoro di tesi siamo riusciti a costruire uno strumento di potenziale interesse per la riduzione del rumore newtoniano, che limita la sensibilità a basse frequenze ($5 \div 50$) Hz degli interferometri terrestri – quali Advanced Virgo –, basato sull’ottimizzazione del posizionamento di sensori sismici attorno al sito stesso. Questo metodo pone le sue fondamenta sul calcolo della correlazione, quantità protagonista nella determinazione dei coefficienti del filtro di Wiener utilizzato nella mitigazione del rumore newtoniano. Il computo di tale grandezza comporta la conoscenza sia della soluzione $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ per il campo sismico, sia la forza newtoniana $\mathbf{F}(t)$ agente sulla massa di test. L’intento è stato quello di poter sostituire il calcolo diretto della correlazione tramite l’uso di una media pesata comprensiva di tutti i modi di vibrazione del sistema, siccome si ha un’uguaglianza nella forma delle due espressioni (Eq. (3.26)), sotto opportune condizioni. L’equivalenza tra i due procedimenti è utile alla determinazione delle mappe di correlazione, vere e proprie figure informative delle posizioni che forniscono la maggiore informazione riguardo alla forza newtoniana agente sullo specchio dell’interferometro.

L’unico requisito da soddisfare per poter usufruire dell’equivalenza sopra descritta, è l’ortogonalità tra i coefficienti temporali – Eq. (3.27) – presenti nella decomposizione della soluzione in modi normali – Eq. (3.2) –. Si è quindi verificato nel semplice caso bidimensionale, schematizzando il movimento sismico del terreno come una corda massiva 1D, l’equivalenza nell’utilizzo della correlazione (calcolata in modo analitico in questo semplice caso) e della media pesata di modi normali del sistema per la determinazione delle mappe, rispettivamente chiamate:

- di *correlazione*, nel caso provengano dal calcolo diretto mediante l’utilizzo della soluzione temporale del sistema;
- di *sensitività*, quando costruite dalla media pesata dei modi di vibrazione.

Nel caso 1D troviamo una perfetta corrispondenza delle mappe sopra citate: si è quindi proceduto alla generalizzazione in 3D.

A questo proposito, si è presentata una panoramica dei software utilizzabili per la simulazione del rumore sismico nel caso in questione, valutandone capacità di calcolo ed approssimazione della soluzione, rispetto ad un modello di benchmark – comprensivo

di soluzione analitica – noto in sismologia. Successivamente, si è realizzato un modello di test molto semplice per svolgere varie simulazioni, sia modali che nel tempo, atto alla validazione del criterio in argomento; sono state ricavate – nel caso di soluzioni descritte tramite la sovrapposizione di modi normali – le mappe di sensitività al fine di un confronto con i pattern teorici attesi per il modello iniziale prodotto, il quale ha esibito un’ottima somiglianza.

Vista la difficoltà riscontrata nell’implementare le condizioni reali per la buona rappresentazione di un rumore sismico nel tempo all’interno del software utilizzato (in generale per il metodo ad elementi finiti), si è proceduto alla generazione di soluzioni cosiddette “pseudo-temporali”, non dinamiche, allo scopo di validazione. Tali soluzioni sono state create “ad-hoc”, variando i parametri di ampiezza e fase contenuti nei coefficienti $A_n(t)$ della decomposizione (o nel caso più generale, estraendo gli $A_n(t)$ stessi da opportune distribuzioni), in modo che conservassero le proprietà fisiche (e matematiche) richieste per la rappresentazione di un campo sismico, quali le caratteristiche di rumore bianco per lo spettro ed ortogonalità per i coefficienti. Le mappe di correlazione da esse provenienti si sono rivelate conformi – a meno di differenze attese – ai pattern teorici previsti. Questa somiglianza ci fa ben sperare che, tra tutte le soluzioni possibili che si possono generare con l’unica accortezza di soddisfare le condizioni di ortogonalità tra i coefficienti richieste, ve ne siano quantomeno un sottoinsieme atte alla buona riproduzione di un rumore sismico, e che quindi anche soluzioni temporali “reali” producano mappe di correlazione affini (sempre a patto che soddisfino i requisiti di ortogonalità).

Nonostante la mancata validazione del metodo con una soluzione temporale di cui sopra, siamo riusciti a proporre uno strumento robusto per ovviare al calcolo (più complesso ed oneroso) della correlazione diretta tramite simulazioni nel tempo. Si è trasferita, infatti, la complessità del processo alla sola realizzazione di un modello – da implementare all’interno del software – quanto più simile possibile al caso reale, dal quale ricavare le mappe di sensitività desiderate, per poter disporre in maniera ottimale i sensori sismici a nostra disposizione. Dato che tutte le mappe informative illustrate in questa tesi sono state prodotte per il buon posizionamento del primo sensore, nel prossimo futuro (partendo da una modellizzazione più realistica del nostro sistema fisico) si richiede il calcolo della correlazione tra i sensori successivi al primo e la forza newtoniana agente sullo specchio (da massimizzare), contemporaneamente alla valutazione della correlazione tra coppie di sensori (da rendere minima) per l’effettiva riproduzione di una mappa di correlazione su cui basarsi per il riposizionamento dei sensori stessi.

APPENDICE A

CORRELAZIONE E DENSITÀ SPETTRALE

Nelle sezioni che seguono, riportiamo alcuni dettagli su quantità statistiche e corrispondenti quantità nello spazio di Fourier di cui si è fatto uso nella stesura di questa tesi.

A.1 Quantità probabilistiche e statistiche

Per completezza, riportiamo un breve sommario delle quantità probabilistiche e statistiche rilevanti per definire la *correlazione*, della quale si è fatto ampio uso in questa trattazione.

A.1.1 Valore atteso

Nella teoria della probabilità, detta X una variabile aleatoria a valori reali $x \in \mathbb{R}$ che ammetta una funzione densità di probabilità $f(x)$, il *valore atteso* (o anche *speranza matematica*) di tale variabile viene definito come:

$$\mathbb{E}[X] \equiv \int_{\mathbb{R}} x f(x) dx . \quad (\text{A.1})$$

Nel caso discreto, dette x_i le possibili “uscite” e $p_i \geq 0$ le rispettive probabilità, il valore atteso si scrive come somma infinita:

$$\mathbb{E}[X] \equiv \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i ; \quad (\text{A.2})$$

chiaramente, se il caso discreto è esteso ad una popolazione di N osservazioni, la somma sarà limitata ad N stesso anziché ∞ .

A.1.2 Covarianza.

La *covarianza* di due variabili aleatorie X ed Y è il valore atteso dei prodotti della loro distanza rispetto alla media corrispondente:

$$\text{cov}(X, Y) \equiv \mathbb{E} [(X - \mathbb{E}[X])(Y - \mathbb{E}[Y])] ; \quad (\text{A.3})$$

per le proprietà di linearità del valore atteso, può essere riscritta nella forma semplificata:

$$\text{cov}(X, Y) = \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]. \quad (\text{A.4})$$

A.1.3 Varianza

La *varianza* è definita come la covarianza tra una variabile e se stessa, cioè:

$$\text{var}(X) \equiv \text{cov}(X, X) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2] = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2. \quad (\text{A.5})$$

A.1.4 Deviazione standard

La *deviazione standard* (o anche *scarto quadratico medio*) è definita come la radice quadrata della varianza:

$$\sigma_X \equiv \sqrt{\text{var}(X)} = \sqrt{\text{cov}(X, X)} = \sqrt{\mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2]} = \sqrt{\mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2}. \quad (\text{A.6})$$

Notazione. In analogia con l'uso di σ_X per indicare la deviazione standard, si usa comunemente la notazione σ_X^2 per indicare la varianza di una variabile aleatoria X ¹; per la stessa ragione, si è diffusa anche la notazione σ_{XY} per indicare la covarianza tra due variabili aleatorie X ed Y .

A.2 Indice di correlazione

L'*indice di correlazione lineare* (o anche *coefficiente di correlazione di Bravais-Pearson*) tra due variabili statistiche X ed Y è definito come [35]:

$$C_{XY} \equiv \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X \sigma_Y}, \quad (\text{A.7})$$

dove σ_{XY} indica la covarianza tra X ed Y , mentre σ_X e σ_Y sono le due deviazioni standard.

Valori limite e dipendenza lineare. Il coefficiente di correlazione assume sempre valori nel range

$$-1 \leq C_{XY} \leq +1, \quad (\text{A.8})$$

ed è un indice che esprime un'eventuale linearità tra le variabili stesse, con i seguenti casi:

- ☉ $C_{XY} = -1$ indica perfetta correlazione lineare inversa (o negativa);
- ☉ $-1 < C_{XY} < 0$ identifica correlazione lineare inversa (o negativa);
- ☉ $C_{XY} = 0$ corrisponde ad un'assenza di correlazione lineare;
- ☉ $0 < C_{XY} < +1$ identifica correlazione lineare diretta (o positiva);
- ☉ $C_{XY} = +1$ indica perfetta correlazione lineare diretta (o positiva).

¹Si può omettere di indicare la variabile aleatoria a pedice (tanto nella scrittura della varianza quanto in quella della deviazione standard), quando non si incorre in ambiguità notazionale.

Si osservi inoltre che, in base al modulo di tale indice, si classificano usualmente i seguenti casi:

- ☉ se $|C_{XY}| = 0$, le variabili X ed Y si dicono *non correlate*;
- ☉ se $0 < |C_{XY}| \leq 0.3$, si ha *debole correlazione* tra le variabili;
- ☉ se $0.3 < |C_{XY}| < 0.7$, vi è *moderata correlazione* tra le variabili;
- ☉ se $0.7 \leq |C_{XY}| < 1$, si ha *forte correlazione* tra le variabili;
- ☉ se $|C_{XY}| = 1$, le variabili X ed Y si dicono *totalmente correlate*.

A.2.1 Correlazione e quantità vettoriali

Essendo l'indice di correlazione una quantità scalare definita a partire da variabili aleatorie (scalari), si pone il problema di poter correlare quantità vettoriali: nel senso stretto del termine, questo è chiaramente impossibile, *ma* è sempre calcolabile la correlazione tra una componente della prima variabile vettoriale ed una della seconda.

Appare evidente che, se le quantità in questione sono usuali (tri-)vettori, i coefficienti di correlazione saranno 9: sia chiaro che la correlazione resta una quantità scalare, ma i coefficienti che ne derivano in questo particolare caso possono – per comodità – essere organizzati in una matrice, detta *matrice di correlazione*². Siano X^i ed Y^j rispettivamente le componenti in questione, allora gli elementi di tale matrice possono convenientemente essere scritti nella forma:

$$C_{XY}^{(ij)} \equiv C_{X^i Y^j} = \frac{\sigma_{X^i Y^j}}{\sigma_{X^i} \sigma_{Y^j}}, \quad \text{per } i, j \in \{1, 2, 3\}. \quad (\text{A.9})$$

Notazione. Nel Cap. 2, ed in particolare nella sua Sez. 2.3, per rendere più compatta la notazione sono stati omessi gli indici che esplicitano quando i coefficienti di correlazione sono organizzati in forma di vettore o in forma di matrice; per non generare confusione, si è però adottata la seguente convenzione:

- ☉ quando i coefficienti di correlazione sono organizzati in forma di vettore, tale vettore è scritto – come in L^AT_EX è consuetudine – in grassetto corsivo, ed a pedice una quantità (quella scalare) è indicata in corsivo semplice e l'altra (quella vettoriale) in corsivo grassetto, ad esempio \mathbf{C}_{XY} ;
- ☉ ogniqualvolta invece i coefficienti di correlazione siano organizzati in forma di matrice, la matrice in questione è riportata – è una delle scelte spesso usate in L^AT_EX – in tondo grassetto, ed a pedice entrambe le quantità (vettoriali) sono indicate in grassetto corsivo, ad esempio \mathbf{C}_{XY} .

A.3 Segnali in tempo e in frequenza

Per concludere questa breve trattazione, si considerino ora segnali stocastici (che siano funzione del tempo): in quest'ottica, verranno riportate le quantità rilevanti nel caso continuo³, tanto nel dominio del tempo quanto nel dominio della frequenza.

²Chiaramente esiste anche il caso particolare in cui tale matrice si riduce ad un vettore, come nella situazione in cui si analizza la correlazione tra una quantità scalare e le componenti di una vettoriale.

³Una trattazione nel caso discreto risulta perfettamente equivalente, ma mostra in maniera meno evidente le corrispondenze che si vogliono invece sottolineare.

A.3.1 Dominio del tempo

Si considerino dunque due segnali in potenza (entrambi funzione del tempo), indicati con $x(t)$ ed $y(t)$ essendo continui: siano essi *stazionari* nel senso che le loro medie e varianze *non* siano dipendenti dal tempo⁴.

Si userà la forma complessa – per generalità – anche se i segnali utilizzati sono (solitamente) reali.

Cross-correlazione. La *cross-correlazione* di due segnali tempo-continui $x(t)$ ed $y(t)$ viene espressa – nella più generale forma – come [35]:

$$C_{xy}(t) = \mathbb{E}[x(\tau)y^*(\tau - t)] = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} x(\tau)y^*(\tau - t) \, d\tau . \quad (\text{A.10})$$

Autocorrelazione. L'*autocorrelazione* di un segnale tempo-continuo, per esempio $x(t)$, viene espressa – nella più generale forma, direttamente derivante come caso particolare dell'Eq. (A.10) – da [35]:

$$C_{xx}(t) = \mathbb{E}[x(\tau)x^*(\tau - t)] = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} x(\tau)x^*(\tau - t) \, d\tau . \quad (\text{A.11})$$

A.3.2 Dominio della frequenza

Siamo $X(\omega)$ ed $Y(\omega)$ le trasformate di Fourier dei segnali $x(t)$ ed $y(t)$ rispettivamente; in formule, con opportuno pre-fattore:

$$X(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{T}} \int_{-T/2}^{+T/2} x(t) e^{-i\omega t} \, dt , \quad (\text{A.12a})$$

$$Y(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{T}} \int_{-T/2}^{+T/2} y(t) e^{-i\omega t} \, dt . \quad (\text{A.12b})$$

Densità spettrale incrociata di potenza. Si definisce *densità spettrale incrociata di potenza* tra due segnali $x(t)$ ed $y(t)$ la quantità [36]:

$$S_{XY}(\omega) \equiv \mathbb{E}[X(\omega)Y^*(\omega)] . \quad (\text{A.13})$$

Densità spettrale di potenza. Si definisce *densità spettrale di potenza* di un segnale, per esempio $x(t)$, la quantità – direttamente derivante come caso particolare dell'Eq. (A.13) – di seguito [36]:

$$S_{XX}(\omega) \equiv \mathbb{E}[X(\omega)X^*(\omega)] , \quad (\text{A.14})$$

spesso indicata semplicemente con $S_X(\omega) = S_{XX}(\omega)$, come nei Cap. 1 e 2.

⁴Per semplicità notazionale della trattazione, da qui in avanti, le medie sono assunte nulle e le varianze unitarie: una trattazione perfettamente rigorosa può essere prodotta ripercorrendo l'identica linea logica senza queste assunzioni.

A.3.3 Teorema Wiener-Khinchin (o di Wiener-Kolmogorov)

Si può evidenziare come la quantità $\mathbb{E}[X(\omega)Y^*(\omega)]$, facendo uso delle relazioni in Eq. (A.12), possa essere riscritta:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X(\omega)Y^*(\omega)] &= \mathbb{E} \left[\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} x(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau \int_{-T/2}^{+T/2} y^*(\tau') e^{+i\omega\tau'} d\tau' \right] = \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} \int_{-T/2}^{+T/2} \mathbb{E} [x(\tau)y^*(\tau')] e^{-i\omega(\tau-\tau')} d\tau d\tau' .\end{aligned}\quad (\text{A.15})$$

Appare più naturale effettuare i cambi di variabile

$$\tau - \tau' = t , \quad (\text{A.16a})$$

$$\tau + \tau' = s , \quad (\text{A.16b})$$

per riscrivere ulteriormente:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X(\omega)Y^*(\omega)] &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} \int_{-(T-|t|)}^{+(T-|t|)} \mathbb{E} [x(\tau)y^*(\tau-t)] e^{-i\omega t} ds dt = \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} \int_{-(T-|t|)}^{+(T-|t|)} C_{xy}(t) e^{-i\omega t} ds dt = \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T}^{+T} \left[1 - \frac{|t|}{T} \right] C_{xy}(t) e^{-i\omega t} dt = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} C_{xy}(t) e^{-i\omega t} dt ,\end{aligned}\quad (\text{A.17})$$

avendo, nel primo passaggio, fatto uso della definizione in Eq. (A.10) e, nell'ultimo, esplicitato il limite (ed effettuato lo scambio tra integrale e limite stesso).

Usando l'ultima scrittura in Eq. (A.17) unitamente all'Eq. (A.13), si ha quindi il risultato finale [36]

$$S_{XY}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} C_{xy}(t) e^{-i\omega t} dt , \quad (\text{A.18})$$

e – come caso particolare, ripercorrendo lo stesso filo logico sopra descritto a partire però dalla quantità $\mathbb{E}[X(\omega)X^*(\omega)]$ unitamente all'identificazione in Eq. (A.14) – anche

$$S_{XX}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} C_{xx}(t) e^{-i\omega t} dt . \quad (\text{A.19})$$

Enunciato. I risultati appena ricavati sono quelli che vengono espressi nel cosiddetto *teorema di Wiener-Khinchin* (altrimenti noto come *teorema di Wiener-Kolmogorov*): «la densità spettrale incrociata di potenza di due segnali può essere vista come la trasformata di Fourier della funzione di cross-correlazione degli stessi, formalmente esprimibile dall'Eq. (A.18)» [36].

Chiaramente, discende come corollario il fatto che «la densità spettrale di potenza di un segnale può essere vista come la trasformata di Fourier della sua funzione di autocorrelazione, formalmente esprimibile dall'Eq. (A.19)».

APPENDICE B

COMPLEMENTO SULLE FUNZIONI COMPLESSE

Nelle sezioni di seguito, riportiamo alcuni dettagli su funzioni complesse e loro proprietà. Per chiarificare l'operazione di derivata in campo complesso utilizzata per le minimizzazioni nella Sottosez. 2.3.1, sono necessarie infatti alcune premesse.

B.1 Funzioni complesse

Sia

$$\mathbb{C} \ni z = x + iy \quad \longleftrightarrow \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad (\text{B.1})$$

un generico numero complesso, allora si può definire

$$F(z) = F(x + iy) = U(x, y) + iV(x, y) \quad (\text{B.2})$$

una generica funzione di variabile complessa, la quale è stata opportunamente riscritta separando la sua parte reale e la sua parte immaginaria in modo tale che

$$F : D \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \quad \longleftrightarrow \quad U, V : B \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}. \quad (\text{B.3})$$

In altre parole, così come assegnare il numero complesso z significa dare un valore alla sua parte reale x ed alla sua parte immaginaria y , definire la funzione complessa F significa assegnare le due funzioni reali U e V .

Complesso coniugato. Si chiama *complesso coniugato* del numero complesso z , e si indica con il simbolo z^* , il numero complesso ottenuto cambiando di segno la parte immaginaria di z stesso:

$$z^* = x - iy. \quad (\text{B.4})$$

In maniera del tutto analoga, si denomina *funzione complessa coniugata* della funzione complessa $F(z)$, e si indica con la simbologia $F^*(z)$, la funzione ottenuta cambiando di segno la sua parte immaginaria, ossia:

$$F^*(z) = F^*(x + iy) = U(x, y) - iV(x, y). \quad (\text{B.5})$$

B.2 Derivabilità in senso complesso

Per una funzione complessa si può definire la derivata *in senso complesso* come limite del rapporto incrementale, in maniera del tutto analoga al caso reale [37].

Definizione. Una funzione F si dice derivabile in senso complesso in un punto $z_0 \in D$ se esiste finito il limite

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{F(z) - F(z_0)}{z - z_0}. \quad (\text{B.6})$$

Il risultato di tale limite, se esiste, viene indicato con $\left. \frac{dF}{dz} \right|_{z_0}$ – oppure con $f'(z_0)$ – e si dice *derivata in senso complesso* di F in z_0 .

Olomorfia o analiticità. Se la funzione F è derivabile in tutti i punti dell'insieme D (dominio), si dice che F è una funzione *olomorfa* (o *analitica*) nel suo dominio.

B.2.1 Fatti equivalenti

Sia $F = U + iV$ una funzione complessa e sia $z_0 = x_0 + iy_0$ un punto del suo dominio D ; sono allora fatti equivalenti le due proprietà.

1. La funzione F è derivabile in z_0 , secondo la definizione in Eq. (B.6).
2. Le due funzioni U e V sono differenziabili in (x_0, y_0) e soddisfano le equazioni di Cauchy-Riemann:

$$\frac{\partial U(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial V(x, y)}{\partial y}, \quad (\text{B.7a})$$

$$\frac{\partial U(x, y)}{\partial y} = -\frac{\partial V(x, y)}{\partial x}. \quad (\text{B.7b})$$

Se quindi la funzione F è tale che le funzioni U e V posseggano derivata parziale prima rispetto sia ad x sia ad y , allora necessariamente devono essere soddisfatte le equazioni di Cauchy-Riemann al fine di poter definire la derivata in senso complesso di F .

Funzioni derivabili. La funzione

$$F(z) = z, \quad (\text{B.8})$$

soddisfacendo banalmente le condizioni di Cauchy-Riemann in Eq. (B.7) essendo

$$\frac{\partial U(x, y)}{\partial x} = +1, \quad \frac{\partial V(x, y)}{\partial y} = +1, \quad \frac{\partial U(x, y)}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial V(x, y)}{\partial x} = 0, \quad (\text{B.9})$$

è derivabile in senso complesso. Analogo discorso vale per la più generale $F(z) = z^n$.

Funzioni non derivabili. Appare ben evidente invece come la funzione

$$F(z) = z^*, \quad (\text{B.10})$$

dal momento che evidentemente le derivate parziali

$$\frac{\partial U(x, y)}{\partial x} = +1, \quad \frac{\partial V(x, y)}{\partial y} = -1, \quad \frac{\partial U(x, y)}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial V(x, y)}{\partial x} = 0, \quad (\text{B.11})$$

non soddisfano le Eq. (B.7) di Cauchy-Riemann, non sia derivabile in senso complesso. Analogo discorso si può attribuire alla funzione modulo quadro: $F(z) = |z|^2 = zz^*$.

B.3 Differenziabilità

Come già accennato nella Sez. B.1, una funzione complessa $F(z)$ può essere definita a partire da una funzione $F(x, y)$ di due variabili come

$$F(x, y) = U(x, y) + iV(x, y) \equiv F(z)|_{z=x+iy} . \quad (\text{B.12})$$

In maniera del tutto naturale, può essere definito il differenziale dF della funzione bivariata come [37]:

$$dF = \frac{\partial F(x, y)}{\partial x} dx + \frac{\partial F(x, y)}{\partial y} dy ; \quad (\text{B.13})$$

altrettanto chiaramente deve essere imposto che la differenziabilità in senso reale della funzione $F(x, y)$ rispetto ad x ed y sia verificata, al fine dell'esistenza del differenziale in questione.

Tale imposizione però implica la differenziabilità delle funzioni a valori reali $U(x, y)$ e $V(x, y)$ rispetto alle variabili x ed y ; a questo livello, appare dunque evidente che l'espressione in Eq. (B.13), tenuta ovviamente in conto l'Eq. (B.12), possa essere riscritta come:

$$dF = \frac{\partial U(x, y)}{\partial x} dx + i \frac{\partial V(x, y)}{\partial x} dx + \frac{\partial U(x, y)}{\partial y} dy + i \frac{\partial V(x, y)}{\partial y} dy . \quad (\text{B.14})$$

Facendo ora uso delle due espressioni

$$dz = dx + i dy , \quad (\text{B.15a})$$

$$dz^* = dx - i dy , \quad (\text{B.15b})$$

le quali discendono in maniera ovvia e diretta rispettivamente dalle Eq. (B.1) e (B.4), i differenziali reali possono essere riscritti come

$$dx = \frac{1}{2}(dz + dz^*) , \quad (\text{B.16a})$$

$$dy = \frac{1}{2i}(dz - dz^*) . \quad (\text{B.16b})$$

Inserendo le espressioni in Eq. (B.16) nell'Eq. (B.14) e raggruppando opportunamente, si ottiene:

$$\begin{aligned} dF = & \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial U(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial V(x, y)}{\partial y} + i \left[\frac{\partial V(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial U(x, y)}{\partial y} \right] \right\} dz + \\ & + \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial U(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial V(x, y)}{\partial y} + i \left[\frac{\partial V(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial U(x, y)}{\partial y} \right] \right\} dz^* ; \end{aligned} \quad (\text{B.17})$$

riorganizzando i termini di quest'ultima Eq. (B.17), il differenziale dF può venire riscritto ancora come [37]:

$$\begin{aligned} dF = & \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} [U(x, y) + iV(x, y)] - i \frac{\partial}{\partial y} [U(x, y) + iV(x, y)] \right\} dz + \\ & + \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} [U(x, y) + iV(x, y)] + i \frac{\partial}{\partial y} [U(x, y) + iV(x, y)] \right\} dz^* = \\ = & \frac{1}{2} \left[\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right] F(x, y) dz + \frac{1}{2} \left[\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right] F(x, y) dz^* , \end{aligned} \quad (\text{B.18})$$

dove – nell'ultimo passaggio – si è ancora fatto uso dell'Eq. (B.12).

B.3.1 Derivate di Wirtinger

Osservando argutamente che le Eq. (B.15) e (B.16) non definiscono altro che un cambio di variabili dalla coppia (x, y) alla coppia (z, z^*) , verrebbe naturale poter riscrivere il differenziale in Eq. (B.18) come¹

$$dF = \frac{\partial F(z)}{\partial z} dz + \frac{\partial F(z)}{\partial z^*} dz^* ; \quad (\text{B.19})$$

ciò è chiaramente possibile, a patto di effettuare le seguenti identificazioni, discendenti dal confronto tra l'ultima espressione in Eq. (B.18) e l'Eq. (B.19):

$$\frac{\partial}{\partial z} \equiv \frac{1}{2} \left[\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right] , \quad (\text{B.20a})$$

$$\frac{\partial}{\partial z^*} \equiv \frac{1}{2} \left[\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right] , \quad (\text{B.20b})$$

le quali sono chiamate *derivate parziali di Wirtinger* [37].

B.3.2 Funzioni olomorfe

Ritornando ad analizzare l'Eq. (B.17), appare evidente che – ogniqualvolta la funzione $F(z)$ sia olomorfa e quindi debba sottostare alle Eq. (B.7) di Cauchy-Riemann – l'espressione del differenziale dF non dipenda dal differenziale dz^* : le espressioni in Eq. (B.7) hanno infatti come conseguenza l'annullamento del termine entro parentesi graffe nella seconda riga dell'Eq. (B.17); compattamente, usando anche l'Eq. (B.20b), le condizioni di Cauchy-Riemann si “traducono” come:

$$\frac{\partial F(z)}{\partial z^*} = 0 . \quad (\text{B.21})$$

Questo è un risultato del tutto naturale ed atteso, e vale anche il viceversa²: se il differenziale di una funzione $F(z)$ non dipende da dz^* , allora la funzione è analitica.

Confronto tra le derivate. Si osservi infine che – per le funzioni olomorfe – la derivata nel senso Wirtinger $\frac{\partial}{\partial z}$ coincide con la derivata nel senso complesso $\frac{d}{dz}$; appare infatti evidente come, in virtù di quanto appena affermato, facendo uso della condizione in Eq. (B.21) all'interno dell'espressione in Eq. (B.19), l'espressione del differenziale si semplifichi dando luogo a

$$\begin{aligned} dF &= \frac{\partial F(z)}{\partial z} dz , \\ \implies \frac{dF(z)}{dz} &= \frac{\partial F(z)}{\partial z} , \end{aligned} \quad (\text{B.22})$$

che esplicita l'uguaglianza tra le derivate come asserito.

¹Si osservi come la funzione $F(z)$, volendo essere estremamente formali, dovrebbe essere scritta come $F(z, z^*)$: si è volutamente omessa questa scrittura in quanto appesantirebbe solo la notazione senza aggiungere alcuna informazione utile.

²In questa trattazione, la dimostrazione viene omessa, in quanto assolutamente non interessante ai nostri fini.

B.3.3 Funzioni complesse e casi rilevanti.

Di seguito alcune immediate conseguenze di quanto appena spiegato, intendendo ogni operazione di derivazione nel senso di Wirtinger.

Caso 1. Sia data la funzione complessa (analitica)

$$F(z) = z , \quad (\text{B.23})$$

allora – dalle Eq. (B.20) – discende che:

$$\frac{\partial F(z)}{\partial z} = 1 , \quad \frac{\partial F(z)}{\partial z^*} = 0 . \quad (\text{B.24})$$

Caso 2. Si consideri la funzione complessa (non olomorfa)

$$F(z) = z^* , \quad (\text{B.25})$$

allora – dalle Eq. (B.20) – si ha che:

$$\frac{\partial F(z)}{\partial z} = 0 , \quad \frac{\partial F(z)}{\partial z^*} = 1 . \quad (\text{B.26})$$

Caso 3. Sia assegnata la funzione complessa (non analitica)

$$F(z) = |z|^2 = zz^* , \quad (\text{B.27})$$

allora – dalle Eq. (B.20) – deriva che:

$$\frac{\partial F(z)}{\partial z} = z^* , \quad \frac{\partial F(z)}{\partial z^*} = z . \quad (\text{B.28})$$

APPENDICE C

CANCELLAZIONE NN: USO DI RETI NEURALI

Nelle sezioni che seguono, viene riportata una breve panoramica (o – meglio – alcuni risultati) di un'ulteriore tecnica di cancellazione basata sull'utilizzo di reti neurali: si ha in prospettiva un vantaggio pratico nell'ottenere migliori risultati a parità del numero di sensori utilizzati (oppure stessi risultati utilizzando un numero minore di sensori).

C.1 Intelligenza artificiale

Una *rete neurale* – o, più precisamente, *rete neurale artificiale* (ANN) – è un modello matematico composto da “neuroni artificiali”: tali sistemi sono ispirati alle reti neurali biologiche, ed il loro intento è quello di essere d'aiuto nella risoluzione di problemi di *intelligenza artificiale* (AI) in diversi ambiti.

Prima di tutto è necessario definire due importanti classi di sistemi, legati al campo in questione: i *sistemi esperti* ed i *sistemi adattivi*.

C.1.1 Sistemi esperti

I *sistemi esperti* sono sistemi che possono riprodurre in maniera artificiale prestazioni analoghe a quelle di una persona esperta in un determinato campo. Inoltre, sono sistemi che – rispondendo in maniera dinamica alle domande dell'utente – danno supporto alla risoluzione di specifici problemi a partire da un determinato dominio di conoscenza e da una serie di nodi logici.

Tali sistemi sono solitamente strutturati a blocchi in tre livelli principali:

1. una *base di conoscenza*, in pratica una sorta di database che consente al sistema di fornire una risposta ad un problema noto;
2. un *motore inferenziale*, cioè un set di regole (del tipo **if-then-else**, per esempio) che permettono al sistema di costruire ed eseguire una sequenza logica in base al problema che ci si trova ad affrontare;

3. un'interfaccia utente, ossia una porzione di software che permette all'utente di "interagire" con il motore inferenziale.

Il vantaggio di questa struttura è che un sistema esperto, fondandosi su una base di conoscenza, può proporre all'utente la migliore alternativa possibile tra quelle disponibili¹.

C.1.2 Sistemi adattivi

Spesso erroneamente inserite all'interno della categoria dei sistemi esperti, le reti neurali fanno parte invece dei *sistemi adattivi*: tali sistemi "deducono" regole da seguire ed attività da svolgere in modo automatico, attraverso un procedimento di apprendimento che ne ottimizza il funzionamento.

Un sistema adattivo è infatti in grado di alterare la propria struttura (per esempio i nodi di scelta, che nel caso dei sistemi esperti possono essere – per esempio – gli `if-then-else` e risultano immutabili) sulla base sia di dati interni preimpostati sia di dati esterni acquisiti (eventualmente anche in tempo reale).

Apprendimento. All'algoritmo vengono sempre forniti un certo quantitativo di set di dati in ingresso, ed anche informazioni sui dati desiderati: l'idea generale è che la rete identifichi regole (anche schemi nascosti) che colleghino i dati in ingresso con quelli in uscita, in maniera tale da estrapolare regole riutilizzabili in compiti simili.

Spesso il sistema deve addirittura interagire con un ambiente dinamico, per raggiungere determinati obiettivi e – a seconda che faccia la "mossa" giusta o sbagliata – riceve feedback positivi o negativi: questi sono controllati da una routine di apprendimento, la quale ne tiene conto quando deve effettuare le "decisioni" successive.

Ad ogni buon conto, un sistema di questo genere è in grado – da un set limitato di dati iniziali sul quale è stato effettuato l'apprendimento – di imparare come comportarsi, e – quando successivamente sollecitato con un set ignoto di dati – di dare una risposta opportunamente ottimizzata.

L'apprendimento di un sistema di questo genere, in particolare, permette di ottenere un comportamento appunto *adattivo* in base alla situazione, ottenendo un doppio vantaggio:

1. con un sistema istruito in questa maniera si ottengono risposte quanto più ottimizzate tanto più si aumentano i set di dati sui quali viene effettuato l'apprendimento;
2. lo stesso sistema – fatto apprendere a partire da diversi set di dati – può adattarsi a differenti situazioni.

C.2 Sensori sismici e reti neurali

Questo comportamento è potenzialmente ottimo anche nella situazione di voler cancellare/mitigare il rumore newtoniano descritto in questo lavoro: utilizzando un numero limitato di sensori sismici per istruire una rete neurale, si potrebbe valutare

¹A differenza di quanto avviene in un normale sistema, in cui esiste una struttura decisionale predefinita "a priori".

in maniera ottimale il rumore newtoniano per poi sottrarlo al segnale proveniente dall'interferometro.

Benché la qui presente trattazione non sia basata su questo approccio, in altri lavori [38] è stato dimostrato che l'uso delle reti neurali al posto del filtro di Wiener porta ad una ben migliore efficacia a parità di numero di sensori sismici a disposizione (o – alternativamente – si ottiene la medesima efficacia con un numero ben più piccolo di sensori). Questo comportamento è evidenziato nella Fig. C.1 di seguito.

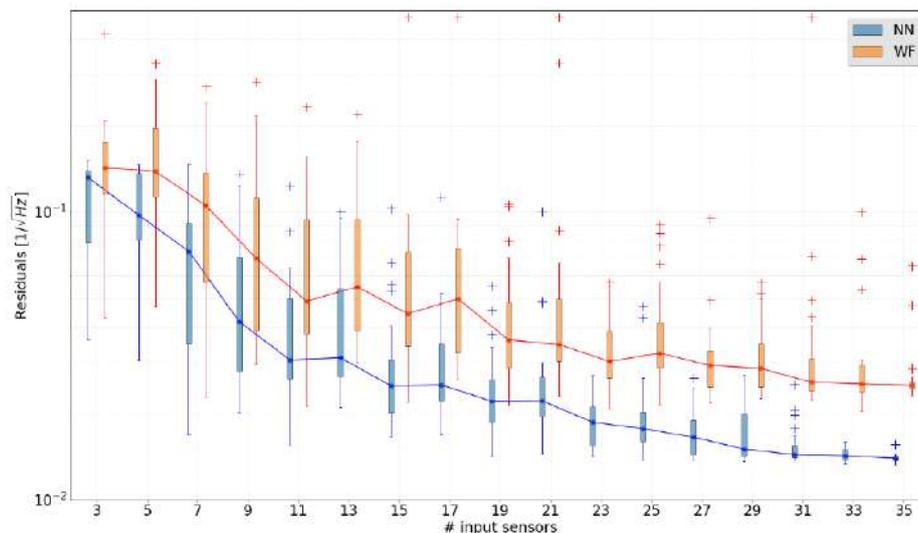


Figura C.1 – L'immagine [38] mostra la distribuzione dei residui del NN a confronto per le due tecniche di cancellazione: i dati risultanti dal WF in arancio, in blu quelli dalle ANN. Il numero di sensori in ingresso è stato variato, selezionandone in ingresso un sottoinsieme di quelli a disposizione in maniera casuale, fino ad un numero massimo di 35.

Appare inoltre evidente come – rispetto alla sottrazione effettuata con il filtro di Wiener –, anche all'aumentare del numero di sensori, la migliore efficacia dell'approccio tramite ANN resti netta.

APPENDICE D

LISTATI

In questa appendice vengono riportati alcuni dei listati di ANSYS utilizzati per le simulazioni: nella Sez. **D.1**, sono visibili quelli implementati per il modello di test descritto nella Sez. **5.1** rispettivamente per la simulazione modale (Sottosez. **D.1.1**) e temporale (Sottosez. **D.1.2**).

Si riportano invece nella Sez. **D.2** – per completezza – i listati per la soluzione modale (Sottosez. **D.2.1**) e temporale (Sottosez. **D.2.2**) del modello più complesso descritto in App. **E** (comprensivo di building), non utilizzato in questa tesi ma sfruttabile per simulazioni più raffinate in futuro. A concludere, vi è un breve paragrafo riguardante le principali caratteristiche derivanti da una singola simulazione nel tempo, al fine di dare al lettore una stima delle tempistiche e dell'occupazione di processore/memoria relative ad una soluzione più complessa.

D.1 Modello di test

D.1.1 Soluzione modale

Di seguito il listato di cui si è fatto uso nella soluzione modale relativa al modello di test descritto in Sez. **5.1**.

```
fini
/cle

/pnum,mat,1
/num,1

/prep7
/vup,1,z
*afun,rad
*abbr,virgo,cubo

btol,1e-8
```

```
pi=2*asin(1)

et,1,solid185
et,2,mesh200,6

/COLOR,NUM,YGRE,1
/COLOR,NUM,BMAG,2
/COLOR,NUM,RED,3
/COLOR,NUM,CBLU,4
/COLOR,NUM,MRED,5
/COLOR,NUM,GREE,6
/COLOR,NUM,ORAN,7
/COLOR,NUM,BLUE,8
/COLOR,NUM,CYAN,9
/COLOR,NUM,BLUE,10
/COLOR,NUM,GCYA,11

terra=1
nmodi=5000

rho_terra=2000

mp,ex,terra,25e6
mp,nuxy,terra,0.25
mp,dens,terra,rho_terra
!mp,alpd,terra,0.001
!mp,betd,terra,0.001

sizep=40/40

esize,sizep

block,-20,20,-20,20,-20,0
mat,1
vmesh,all

nsel,s,loc,z,-20
d,all,uz,0
nsel,s,loc,x,-20
nsel,a,loc,x,20
d,all,ux,0
nsel,s,loc,y,-20
nsel,a,loc,y,20
d,all,uy,0
allsel

/pnum,mat,1
/num,1
```

```
save ,cubo ,db

/solu

antype ,2

modopt ,lanb ,nmodi , , , ,on

solve

/post1

/header , off , off , off , off ,on , off

/out ,frequenze ,dat
set , list
/out

*get ,nnode ,node ,0 ,count
*dim ,nodi , ,nnode ,4
*do ,j ,1 ,nnode
nodi (j ,1)=j
nodi (j ,2)=nx(j)
nodi (j ,3)=ny(j)
nodi (j ,4)=nz(j)
*enddo

/out ,nodi ,dat
*vwrite ,nodi (1 ,1) ,nodi (1 ,2) ,nodi (1 ,3) ,nodi (1 ,4)
(1F8.0 ,4E16.8)
/out

*dim ,matnodi , ,nnode ,4

*do ,i ,1 ,nmodi

*if ,i ,eq ,1 ,then
set , first
*else
set , next
*endif

*do ,j ,1 ,nnode
matnodi (j ,1)=j
matnodi (j ,2)=ux(j)
matnodi (j ,3)=uy(j)
matnodi (j ,4)=uz(j)
*enddo
```

```

* if , i , lt , 10 , then
/out , freq0000%i% , dat
*vwrite , matnodi ( 1 , 1 ) , matnodi ( 1 , 2 ) , matnodi ( 1 , 3 ) , matnodi ( 1 , 4 )
( 1F8.0 , 4E16.8 )
/out

* elseif , i , lt , 100 , then
/out , freq000%i% , dat
*vwrite , matnodi ( 1 , 1 ) , matnodi ( 1 , 2 ) , matnodi ( 1 , 3 ) , matnodi ( 1 , 4 )
( 1F8.0 , 4E16.8 )
/out

* elseif , i , lt , 1000 , then
/out , freq00%i% , dat
*vwrite , matnodi ( 1 , 1 ) , matnodi ( 1 , 2 ) , matnodi ( 1 , 3 ) , matnodi ( 1 , 4 )
( 1F8.0 , 4E16.8 )
/out

* elseif , i , lt , 10000 , then
/out , freq0%i% , dat
*vwrite , matnodi ( 1 , 1 ) , matnodi ( 1 , 2 ) , matnodi ( 1 , 3 ) , matnodi ( 1 , 4 )
( 1F8.0 , 4E16.8 )
/out

* elseif , i , lt , 100000 , then
/out , freq%i% , dat
*vwrite , matnodi ( 1 , 1 ) , matnodi ( 1 , 2 ) , matnodi ( 1 , 3 ) , matnodi ( 1 , 4 )
( 1F8.0 , 4E16.8 )
/out
* endif

* enddo

```

D.1.2 Soluzione temporale

Di seguito il listato di cui si è fatto uso nella soluzione temporale descritta in Sez. 7.1 relativa al modello di test.

```

fini
/cle

/pnum , mat , 1
/num , 1

resume , cubo , db

/prep7

```

```

/vup,1,z
*afun,rad
*abbr,virgo,cubo-t

btol,1e-8

pi=2*asin(1)

/COLOR,NUM,YGRE,1

mp,alpd,terra,0.001
mp,betd,terra,0.001

kk=1

deltat=1e-2      ! step temporale in secondi
tcalc=30        ! tempo di calcolo in secondi
numsb=tcalc/deltat ! numero step di calcolo
nsorg=100       ! numero sorgenti
lp=20           ! lato scatola che contiene le sorgenti
hh=1            ! posizione specchio sull'orizzontale

*dim,forza,,numsb,4
*vread,forza(1,1),'D:\ANSYS\VIRGO\NEWTONIANO\CUBO\DINAMICA\forza',txt,,jik,4
(F8.0,3F12.2)

forzax=0
forzay=0

*get,nelem,elem,0,count
*dim,masa,,nelem
*dim,coord,,nelem,3

*do,i,1,nelem
*get,vvol,elem,i,volu
*get,mmat,elem,i,attr,mat
masa(i)=rho_terra*vvol
coord(i,1)=centrx(i)
coord(i,2)=centry(i)
coord(i,3)=centrz(i)
forzax=forzax+(masa(i)/(coord(i,1)**2+coord(i,2)**2+(hh-coord(i,3))**2)*co
forzay=forzay+(masa(i)/(coord(i,1)**2+coord(i,2)**2+(hh-coord(i,3))**2)*co
*enddo

forzax=forzax*6.67408e-11
forzay=forzay*6.67408e-11

tempo=0

```

```
/out , forza , dat
*vwrite , tempo , forzax , forzay
(1F10.2 , 2E18.10)
/out
```

```
save , cubo-t , db
```

```
/solu
```

```
antype , trans
outres , all , last
fcum , repl
*afun , rad
```

```
nsubst , 1 , 1 , 1 , off
```

```
*get , nnode , node , 0 , count
*dim , matnodi , , nnode , 4
```

```
*do , i , 1 , numsb
```

```
tempo=i*deltat
```

```
f , forza ( i , 1 ) , fx , forza ( i , 2 )
f , forza ( i , 1 ) , fy , forza ( i , 3 )
f , forza ( i , 1 ) , fz , forza ( i , 4 )
```

```
time , tempo
solve
```

```
*do , j , 1 , nnode
matnodi ( j , 1 ) = j
matnodi ( j , 2 ) = ux ( j )
matnodi ( j , 3 ) = uy ( j )
matnodi ( j , 4 ) = uz ( j )
*enddo
```

```
forzax=0
forzay=0
*do , ii , 1 , nelem
esel , s , elem , , ii
nsle , s
ppp=0
spox=0
spoy=0
spoz=0
*do , j , 1 , 8
```

```

ppp=ndnext ( ppp )
spox=spox+ux ( ppp )
spoy=spoy+uy ( ppp )
spoz=spoz+uz ( ppp )
*enddo
spox=spox/8
spoy=spoy/8
spoz=spoz/8
nuovax=coord ( ii ,1 )+spox
nuovay=coord ( ii ,2 )+spoy
nuovaz=coord ( ii ,3 )+spoz
forzax=forzax+massa ( ii )/( nuovax**2+nuovay**2+(hh-nuovaz)**2)*nuovax/sqrt ( nu
forzay=forzay+massa ( ii )/( nuovax**2+nuovay**2+(hh-nuovaz)**2)*nuovay/sqrt ( nu
*enddo

forzax=forzax*6.67408e-11
forzay=forzay*6.67408e-11

/out , forza , dat , , append
*vwrite , tempo , forzax , forzay
(1F10.2 , 2E18.10)
/out

allsel

*if , i , lt , 10 , then
/out , run%kk%_000%i% , dat
*vwrite , matnodi ( 1 , 1 ) , matnodi ( 1 , 2 ) , matnodi ( 1 , 3 ) , matnodi ( 1 , 4 )
(1F8.0 , 4E16.8)
/out

*elseif , i , lt , 100 , then
/out , run%kk%_00%i% , dat
*vwrite , matnodi ( 1 , 1 ) , matnodi ( 1 , 2 ) , matnodi ( 1 , 3 ) , matnodi ( 1 , 4 )
(1F8.0 , 4E16.8)
/out

*elseif , i , lt , 1000 , then
/out , run%kk%_0%i% , dat
*vwrite , matnodi ( 1 , 1 ) , matnodi ( 1 , 2 ) , matnodi ( 1 , 3 ) , matnodi ( 1 , 4 )
(1F8.0 , 4E16.8)
/out

*elseif , i , lt , 10000 , then
/out , run%kk%_%i% , dat
*vwrite , matnodi ( 1 , 1 ) , matnodi ( 1 , 2 ) , matnodi ( 1 , 3 ) , matnodi ( 1 , 4 )
(1F8.0 , 4E16.8)
/out

```

```

*endif

*enddo

/eof

/post26

nsel , s , loc , y , 0
nsel , r , loc , x , 10
*get , nnode1 , node , 0 , num , max

nsol , 2 , nnode1 , u , y , uy_2
nsol , 3 , nnode1 , u , x , ux_2
plvar , 2 , 3 , 4 , 5
prvar , 2 , 3 , 4 , 5

```

D.2 Modello completo

D.2.1 Soluzione modale

Di seguito il listato di cui si è fatto uso nella soluzione modale relativa al modello completo descritto in App. E.

```

fini
/cle

/pnum , mat , 1
/num , 1

/prep7
/vup , 1 , z
*afun , rad
*abbr , virgo , virgo-real-n

btol , 1e-8

pi=2*asin(1)

et , 1 , solid185
et , 2 , mesh200 , 6

/COLOR,NUM,YGRE,1
/COLOR,NUM,BMAG,2
/COLOR,NUM,RED,3
/COLOR,NUM,CBLU,4
/COLOR,NUM,MRED,5

```

```
/COLOR,NUM,GREE,6  
/COLOR,NUM,ORAN,7  
/COLOR,NUM,BLUE,8  
/COLOR,NUM,CYAN,9  
/COLOR,NUM,BLUE,10  
/COLOR,NUM,GCYA,11
```

```
terra=1  
sidebuild=2  
centbuild=3  
supbuild=4  
col1=5  
col2=6  
col3=7  
cemento=8  
aria=9
```

```
mp,ex,terra,4e6  
mp,nuxy,terra,0.25  
mp,dens,terra,2e3  
mp,alpd,terra,0.001  
mp,betd,terra,0.001
```

```
mp,ex,sidebuild,30e9  
mp,nuxy,sidebuild,0.2  
mp,dens,sidebuild,2e3  
mp,alpd,sidebuild,0.001  
mp,betd,sidebuild,0.001
```

```
mp,ex,centbuild,30e9  
mp,nuxy,centbuild,0.2  
mp,dens,centbuild,2e3  
mp,alpd,centbuild,0.001  
mp,betd,centbuild,0.001
```

```
mp,ex,supbuild,200e9  
mp,nuxy,supbuild,0.3  
mp,dens,supbuild,8e3  
mp,alpd,supbuild,0.001  
mp,betd,supbuild,0.001
```

```
mp,ex,col1,30e9  
mp,nuxy,col1,0.2  
mp,dens,col1,2e3  
mp,alpd,col1,0.001  
mp,betd,col1,0.001
```

```
mp,ex,col2,30e9
```

```

mp, nuxy , col2 , 0.2
mp, dens , col2 , 2e3
mp, alpd , col2 , 0.001
mp, betd , col2 , 0.001

```

```

mp, ex , col3 , 30e9
mp, nuxy , col3 , 0.2
mp, dens , col3 , 2e3
mp, alpd , col3 , 0.001
mp, betd , col3 , 0.001

```

```

mp, ex , cemento , 30e9
mp, nuxy , cemento , 0.2
mp, dens , cemento , 2e3
mp, alpd , cemento , 0.001
mp, betd , cemento , 0.001

```

```

mp, ex , aria , 1e5
mp, nuxy , aria , 0.3
mp, dens , aria , 1e3
mp, alpd , aria , 0.001
mp, betd , aria , 0.001

```

```

l1=0.735/2 ! lato/2 delle colonne da 61 a 80
l2=1.1/2   ! lato/2 delle colonne da 81 a 86
l3=0.41/2  ! lato/2 delle colonne da 87 a 96
nmodi=10000 ! numero di modi normali calcolati

```

```

*dim, quote , , 100 , 4
*vread , quote ( 1 , 1 ) , quote , prn , , jik , 4 , 100
(4F9.3)

```

```

sizep=1
sizem=5*sizep
sizeg=5*sizem

```

```

esize , sizep

```

```

k,1 , quote ( 1 , 1 ) , quote ( 1 , 2 ) , quote ( 1 , 3 )
k,2 , quote ( 4 , 1 ) , quote ( 4 , 2 ) , quote ( 4 , 3 )
k,3 , quote ( 6 , 1 ) , quote ( 6 , 2 ) , quote ( 6 , 3 )
k,4 , quote ( 9 , 1 ) , quote ( 9 , 2 ) , quote ( 9 , 3 )
k,5 , quote ( 10 , 1 ) , quote ( 10 , 2 ) , quote ( 10 , 3 )
k,6 , quote ( 8 , 1 ) , quote ( 8 , 2 ) , quote ( 8 , 3 )
k,7 , quote ( 12 , 1 ) , quote ( 12 , 2 ) , quote ( 12 , 3 )
k,8 , quote ( 13 , 1 ) , quote ( 13 , 2 ) , quote ( 13 , 3 )
k,9 , quote ( 14 , 1 ) , quote ( 14 , 2 ) , quote ( 14 , 3 )
k,10 , quote ( 16 , 1 ) , quote ( 16 , 2 ) , quote ( 16 , 3 )

```

```
a,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10
```

```
k,11,quote(2,1),quote(2,2),quote(2,3)
k,12,quote(3,1),quote(3,2),quote(3,3)
k,13,quote(5,1),quote(5,2),quote(5,3)
k,14,quote(7,1),quote(7,2),quote(7,3)
k,15,quote(11,1),quote(11,2),quote(11,3)
k,16,quote(15,1),quote(15,2),quote(15,3)
a,11,12,13,14,15,16
```

```
aovlap,all
numcmp,all
```

```
mat,terra
amesh,1
mat,sidebuild
amesh,2
```

```
/pnum,mat,1
/num,1
```

```
*get,kmax,kp,0,num,max
```

```
asel,none
lsel,none
ksel,none
```

```
*do,i,1,20
k,kmax+i,quote(16+i,1),quote(16+i,2),quote(16+i,3)
*enddo
```

```
*do,i,1,19
l,kmax+i,kmax+i+1
*enddo
```

```
l,kmax+1,kmax+20
al,all
```

```
*get,kmax,kp,0,num,max
```

```
*do,i,1,22
k,kmax+i,quote(36+i,1),quote(36+i,2),quote(36+i,3)
*enddo
```

```
*do,i,1,21
l,kmax+i,kmax+i+1
*enddo
```

```
l , kmax+1, kmax+22  
al , all
```

```
aovlap , all  
numcmp, all
```

```
wpoffs , , , quote (58 ,3)  
rectng , quote (60 ,1) , quote (58 ,1) , quote (60 ,2) , quote (58 ,2)  
aovlap , all  
numcmp, all
```

```
rectng , quote (97 ,1) , quote (99 ,1) , quote (97 ,2) , quote (99 ,2)  
aovlap , all  
numcmp, all
```

```
*do , i , 61 , 80  
rectng , quote (i ,1) - 11 , quote (i ,1) + 11 , quote (i ,2) - 11 , quote (i ,2) + 11  
*enddo
```

```
aovlap , all  
numcmp, all
```

```
*do , i , 81 , 86  
rectng , quote (i ,1) - 12 , quote (i ,1) + 12 , quote (i ,2) - 12 , quote (i ,2) + 12  
*enddo
```

```
aovlap , all  
numcmp, all
```

```
*do , i , 87 , 96  
rectng , quote (i ,1) - 13 , quote (i ,1) + 13 , quote (i ,2) - 13 , quote (i ,2) + 13  
*enddo
```

```
aovlap , all  
numcmp, all
```

```
mat , centbuild  
lsl , s , loc , x , quote (60 ,1) , quote (58 ,1)  
lsl , r , loc , y , quote (60 ,2) , quote (58 ,2)  
asll , s , 1  
asel , a , area , , 4 , 24  
amesh , all
```

```
mat , 1  
amesh , all
```

```
allsel
```

```

xmin=quote(1,1)-2
xmax=60+xmin !quote(33,1)+2
ymin=quote(14,2)-2
ymax=quote(26,2)+2

rectng , xmin , xmax , ymin , ymax
aovlap , all
numcmp , all

mat , 1
amesh , all

csys , 0
wpcsys , -1 , 0

!!!!!! ESTRUSIONE DA Z=-0.1 A Z=-0.6

extopt , on
extopt , aclear , 1
extopt , attr , 1
extopt , esize , 1

vext , all , , , , quote(87,3) - quote(1,3)

!!!!!! ESTRUSIONE DA Z=-0.6 A Z=-0.66

*do , i , 1 , 7
vsel , s , mat , , i
aslv , s
aatt , i
*enddo

asel , s , area , , 233 , 238 , 5
asel , a , area , , 243 , 248 , 5
asel , a , area , , 253 , 258 , 5
asel , a , area , , 263 , 268 , 5
asel , a , area , , 273 , 278 , 5
asel , a , area , , 303 , 308 , 5
asel , a , area , , 313 , 318 , 5
aatt , col3

asel , s , loc , z , quote(87,3)
vext , all , , , , quote(1,4) - quote(87,3)

!!!!!! ESTRUSIONE DA Z=-0.66 A Z=-1.1

*do , i , 1 , 7
vsel , s , mat , , i

```

```
aslv , s
aatt , i
*enddo

asel , s , mat , , sidebuild
aatt , 1

asel , s , loc , z , quote ( 1 , 4 )
vext , all , , , , quote ( 17 , 4 ) - quote ( 1 , 4 )

!!!!!! ESTRUSIONE DA Z=-1.1 A Z=-3.5

*do , i , 1 , 7
vsel , s , mat , , i
aslv , s
aatt , i
*enddo

asel , s , mat , , centbuild
aatt , 1

asel , s , area , , 665 , 760 , 5
aatt , coll

extopt , esize , 4
asel , s , loc , z , quote ( 17 , 4 )
vext , all , , , , quote ( 87 , 4 ) - quote ( 17 , 4 )

!!!!!! ESTRUSIONE DA Z=-3.5 A Z=-4.1

*do , i , 1 , 7
vsel , s , mat , , i
aslv , s
aatt , i
*enddo

asel , s , mat , , col3
aatt , 1

extopt , esize , 1
asel , s , loc , z , quote ( 87 , 4 )
vext , all , , , , quote ( 81 , 3 ) - quote ( 87 , 4 )

!!!!!! ESTRUSIONE DA Z=-4.1 A Z=-31.1

*do , i , 1 , 7
vsel , s , mat , , i
aslv , s
```

```
aatt , i
*enddo

asel , s , area , , 1359
asel , a , area , , 1364
asel , a , area , , 1368
asel , a , area , , 1373
asel , a , area , , 1407
asel , a , area , , 1412
asel , a , area , , 1417
asel , a , area , , 1422
asel , a , area , , 1427
asel , a , area , , 1432
asel , a , area , , 1437
asel , a , area , , 1442
aatt , col2

extopt , esize , 10 , 5
asel , s , loc , z , quote ( 81 , 3 )
vext , all , , , , quote ( 61 , 4 ) - quote ( 81 , 3 )

!!!!!! ESTRUSIONE DA Z=-31.1 A Z=-52.1

*do , i , 1 , 7
vsel , s , mat , , i
aslv , s
aatt , i
*enddo

asel , s , mat , , col1
aatt , 1

extopt , esize , 4
asel , s , loc , z , quote ( 61 , 4 )
vext , all , , , , quote ( 81 , 4 ) - quote ( 61 , 4 )

!!!!!! ESTRUSIONE DA Z=-52.1 A Z=-60

allsel
aatt , 1

extopt , esize , 2
asel , s , loc , z , quote ( 81 , 4 )
vext , all , , , , -60 - quote ( 81 , 4 )

!!!!!! ESTRUSIONE DA Z=-0.1 A Z=0

allsel
```

```

aatt ,1

extopt , esize ,1
asel ,s ,loc ,z ,quote (1 ,3)
vext ,all , , , ,0 - quote (1 ,3)

!!!!!! ESTRUSIONE DA Z=0 A Z=0.3

asel ,s ,loc ,z ,0
lsla ,s
lsel ,r ,loc ,x ,quote (97 ,1) ,quote (99 ,1)
lsel ,r ,loc ,y ,quote (97 ,2) ,quote (99 ,2)
asll ,s ,1
aatt ,supbuild

extopt , esize ,1
vext ,all , , , ,quote (99 ,4)

csys ,0
wpcsys , -1 ,0
allsel

esel ,s ,mat , , terra
esel ,r ,cent ,z , -3.5 , -0.6
esel ,r ,cent ,x , -7.2 ,5.2
esel ,r ,cent ,y , -1.8 ,1.8
mpchg ,aria , all

esel ,s ,mat , , terra
esel ,r ,cent ,z , -4.1 , -3.5
esel ,r ,cent ,x , -7.2 ,5.2
esel ,r ,cent ,y , -1.8 ,1.8
mpchg ,cemento , all

!!!!!! CENTRO IL PARALLELEPIPEDO

allsel
local ,11 ,0 , - (xmin+xmax)/2 , - (ymin+ymax)/2
csys ,0
vtran ,11 ,all , , , ,1

!!!! AGGIUNGO PARTI MANCANTI A FORMARE UN CUBO DI LATO 120

asel ,s ,loc ,y ,(ymax-ymin)/2
extopt , esize ,(60 - (ymax-ymin)/2)/4 ,5
vext ,all , , , ,(60 - (ymax-ymin)/2)

asel ,s ,loc ,y , - (ymax-ymin)/2

```

```

vext , all , , , -(60 - (ymax-ymin) / 2)

asel , s , loc , x , (xmax-xmin) / 2
extopt , esize , (60 - (xmax-xmin) / 2) / 4 , 5
vext , all , , , (60 - (xmax-xmin) / 2)

asel , s , loc , x , -(xmax-xmin) / 2
vext , all , , , -(60 - (xmax-xmin) / 2)

!!!! AGGIUNGO ARIA ESTERNA

lp=60
lm=4*lp

extopt , esize , (lm-lp) / 20 , 10
asel , s , loc , x , lp
vext , all , , , (lm-lp) , , , lm/lp , lm/lp
asel , s , loc , y , lp
vext , all , , , (lm-lp) , , , lm/lp , , lm/lp
asel , s , loc , z , -lp
vext , all , , , , -(lm-lp) , lm/lp , lm/lp ,

asel , s , loc , x , -lp
vext , all , , , -(lm-lp) , , , lm/lp , lm/lp
asel , s , loc , y , -lp
vext , all , , , , -(lm-lp) , , , lm/lp , , lm/lp

allsel
nummrg , node , 1e-10 , 1e-10
nummrg , kp , 1e-10 , 1e-10
numcmp , all

save , virgo-real-n , db

/eof

/solu

antype , 2

modopt , lanb , nmodi , , , , on

asel , s , ext
asel , u , loc , z , 0
nsla , s , 1
d , all , ux , 0
d , all , uy , 0
d , all , uz , 0

```

```
allsel

solve

/post1

/header , off , off , off , off , on , off

/out , frequenze , dat
set , list
/out

*get , nnode , node , 0 , count
*dim , nodi , , nnode , 4
*do , j , 1 , nnode
nodi ( j , 1 ) = j
nodi ( j , 2 ) = nx ( j )
nodi ( j , 3 ) = ny ( j )
nodi ( j , 4 ) = nz ( j )
*enddo

/out , nodi , dat
*vwrite , nodi ( 1 , 1 ) , nodi ( 1 , 2 ) , nodi ( 1 , 3 ) , nodi ( 1 , 4 )
( 1F8.0 , 4E16.8 )
/out

*dim , matnodi , , nnode , 4

*do , i , 1 , nmodi

*if , i , eq , 1 , then
set , first
*else
set , next
*endif

*do , j , 1 , nnode
matnodi ( j , 1 ) = j
matnodi ( j , 2 ) = ux ( j )
matnodi ( j , 3 ) = uy ( j )
matnodi ( j , 4 ) = uz ( j )
*enddo

*if , i , lt , 10 , then
/out , freq0000%i% , dat
*vwrite , matnodi ( 1 , 1 ) , matnodi ( 1 , 2 ) , matnodi ( 1 , 3 ) , matnodi ( 1 , 4 )
( 1F8.0 , 4E16.8 )
/out
```

```

*elseif , i , lt , 100 , then
/out , freq000%i% , dat
*vwrite , matnodi ( 1 , 1 ) , matnodi ( 1 , 2 ) , matnodi ( 1 , 3 ) , matnodi ( 1 , 4 )
( 1F8.0 , 4E16.8 )
/out

*elseif , i , lt , 1000 , then
/out , freq00%i% , dat
*vwrite , matnodi ( 1 , 1 ) , matnodi ( 1 , 2 ) , matnodi ( 1 , 3 ) , matnodi ( 1 , 4 )
( 1F8.0 , 4E16.8 )
/out
*endif

*elseif , i , lt , 10000 , then
/out , freq0%i% , dat
*vwrite , matnodi ( 1 , 1 ) , matnodi ( 1 , 2 ) , matnodi ( 1 , 3 ) , matnodi ( 1 , 4 )
( 1F8.0 , 4E16.8 )
/out
*endif

*elseif , i , lt , 100000 , then
/out , freq%i% , dat
*vwrite , matnodi ( 1 , 1 ) , matnodi ( 1 , 2 ) , matnodi ( 1 , 3 ) , matnodi ( 1 , 4 )
( 1F8.0 , 4E16.8 )
/out
*endif

*enddo

```

D.2.2 Soluzione temporale

Listato. Di seguito il listato di cui si è fatto uso nella soluzione temporale relativa al modello completo descritto in App. E.

```

fini
/cle

/pnum , mat , 1
/num , 1

resume , virgo - real - n , db

/prep7
/vup , 1 , z
*afun , rad
*abbr , virgo , virgo - real - t

```

```

btol,1e-8

pi=2*asin(1)

/COLOR,NUM,YGRE,1

kk=1

freqmn=5          ! frequenza min forzante
freqmx=40         ! frequenza max forzante

deltat=1e-2       ! step temporale in secondi
tcalc=120         ! tempo di calcolo in secondi
numsb=tcalc/deltat ! numero step di calcolo
f0=1000          ! modulo forzante in newton
nsorg=20         ! numero sorgenti
lp=20           ! lato scatola che contiene le sorgenti

*dim,freq,,nsorg
*vfill,freq,rand,freqmn,freqmx

*do,i,1,nsorg
*dim,fase%i%,,numsb
*vfill,fase%i%,rand,0,360
*enddo

*dim,posi,,nsorg,6
*vfill,posi(1,1),rand,0,lp
*vfill,posi(1,2),rand,0,lp
*vfill,posi(1,3),rand,-lp,0
*vfill,posi(1,4),rand,0.5,3.5
*vfill,posi(1,5),rand,-1,1
*vfill,posi(1,6),rand,-1,1

*do,i,1,nsorg
nnode%i%=node(posi(i,1)*posi(i,5)/abs(posi(i,5)),posi(i,2)*posi(i,6)/abs(posi(
*enddo

save,virgo-real-t,db

/solu

antype,trans
outres,all,last
nlgeom,on
*afun,rad

asel,s,ext

```

```

asel ,u,loc ,z,0
nsla ,s,1
d ,all ,ux,0
d ,all ,uy,0
d ,all ,uz,0
allsel

nsubst ,1,1,1 , off

*get ,nnode ,node ,0 , count
*dim ,matnodi , , nnode ,4

*do , i ,1 , numsb

tempo=i*deltat

*do , j ,1 , nsorg
*if , nint ( posi ( j ,4) ) , eq ,1 , then
f , nnode%j% , fx , f0 * sin ( 2 * pi * freq ( j ) * tempo + fase%j%(i) * pi /180)
*elseif , nint ( posi ( j ,4) ) , eq ,2 , then
f , nnode%j% , fy , f0 * sin ( 2 * pi * freq ( j ) * tempo + fase%j%(i) * pi /180)
*else
f , nnode%j% , fz , f0 * sin ( 2 * pi * freq ( j ) * tempo + fase%j%(i) * pi /180)
*endif
*enddo

time , tempo
solve

*do , j ,1 , nnode
matnodi ( j ,1) = j
matnodi ( j ,2) = ux ( j )
matnodi ( j ,3) = uy ( j )
matnodi ( j ,4) = uz ( j )
*enddo

*if , i , lt ,10 , then
/out , run%kk%_00%i% , dat
*vwrite , matnodi (1 ,1) , matnodi (1 ,2) , matnodi (1 ,3) , matnodi (1 ,4)
(1F8.0 ,4E16.8)
/out

*elseif , i , lt ,100 , then
/out , run%kk%_0%i% , dat
*vwrite , matnodi (1 ,1) , matnodi (1 ,2) , matnodi (1 ,3) , matnodi (1 ,4)
(1F8.0 ,4E16.8)
/out

```

```

*elseif , i , lt , 1000 , then
/out , run%kk%_%i% , dat
*vwrite , matnodi ( 1 , 1 ) , matnodi ( 1 , 2 ) , matnodi ( 1 , 3 ) , matnodi ( 1 , 4 )
( 1F8.0 , 4E16.8 )
/out
*endif

*enddo

/eof

/post26

nsel , s , loc , y , 0
nsel , r , loc , x , 10
*get , nnode1 , node , 0 , num , max

nsol , 2 , nnode1 , u , y , uy_2
nsol , 3 , nnode1 , u , x , ux_2
plvar , 2 , 3 , 4 , 5
prvar , 2 , 3 , 4 , 5

```

Caratteristiche. Il listato presentato in questa sottosezione è indicativo di un modello in cui si è posto il building (modellizzato come descritto in App. E) sulla superficie di un cubo di lato 20 m (rappresentativo del terreno circostante) caratterizzato da 20 sorgenti sismiche casuali della forma:

$$f = f_0 \sin(2\pi\nu_i t + \phi_i) \quad (\text{D.1})$$

dove $f_0 = 1 \cdot 10^3$ N rappresenta l'ampiezza della forzante, ϕ_i fase casuale in $[0, 2\pi)$ e ν_i frequenza¹ casuale compresa nel range di interesse (5 ÷ 50) Hz. Si è fatto uso di una frequenza di campionamento di 100 Hz, equivalente a step temporali di $\Delta t = 0.01$ s per un tempo di presa dati totale di $t_c = 120$ s. Il software doveva quindi calcolare la soluzione per un totale di sub-step pari a $n_{\text{sub}} = t_c/\Delta t = 12000$.

Si riportano di seguito, a fini puramente informativi, alcuni dati ricavati dal file.out restituito dalla simulazione temporale di cui sopra:

- 🕒 *loadstep 1*: 08.08.2019 h. 12:03,
- 🕒 *loadstep 12000*: 14.09.2019 h. 07:42,
- 🖨️ *processore Intel®Xeon® Processor E5-2643 @3.30 GHz*,
- 🧑‍💻 *core/threads 4/8*,

per un totale di circa 35 d di tempo macchina, ed un file complessivo file.dat² di dimensione 3.5 TB.

¹Si sono qui indicate le frequenze con ν_i (e non con f_i) per non rischiare di ingenerare confusione con l'ampiezza f_0 della forzante.

²Il software restituisce tanti file quanti sono gli step temporali di ogni run, ognuno contenente gli spostamenti – per ogni nodo – lungo le direzioni \hat{x} , \hat{y} , \hat{z} .

APPENDICE E

MODELLI AVANZATI

In questa appendice vengono riportati rispettivamente:

- ② il metodo con cui sono stati costruiti i modelli più vicini al caso reale da implementare in simulazioni future (sia modali che temporali);
- ② i vari step evolutivi che hanno subito le piante degli edifici – in particolare il Nord End Building (NEB) ed il Central Building (CEB) di Virgo – nel processo di modellizzazione.

E.1 Procedimento di modellizzazione

Di seguito verrà presentato il metodo con cui sono stati costruiti i modelli più avanzati da implementare nelle future simulazioni e quali approssimazioni sono state effettuate. Vi sono, infatti, molte problematiche nella riproduzione di un modello realistico – indipendentemente dal software utilizzato – in quanto le posizioni ottimali dei sensori ricercate (per maggiori informazioni si faccia riferimento al Sez. 2.4) vengono fortemente influenzate da svariati fattori, quali inomogeneità del terreno, infrastrutture circostanti, peculiarità della forma del suolo in prossimità dello specchio. . . .

Per modellizzare le infrastrutture presenti sul sito a partire dalle piante reali (riportate nella Sez. E.2), è stato fatto uso di un programma CAD. Nella prossima sezione si riportano le caratteristiche principali dei modelli costruiti.

E.1.1 Modelli in AutoCAD

AutoCAD è un programma di disegno tecnico assistito da computer (CAD), molto utilizzato come supporto alla produzione di progetti in due e tre dimensioni in ambito ingegneristico, architettonico e non solo. In questo specifico caso, ho utilizzato questo software per la ri-modellizzazione di alcune delle piante strutturali originali di Virgo, in particolare la pianta delle fondazioni del NEB e la pianta delle fondazioni ed il primo livello del CEB (visibili rispettivamente nelle Sottosez. E.2.1 e E.2.2). La semplificazione dei disegni è stata eseguita per agevolare la riproduzione di tali modelli in ANSYS nonché alleggerirne il processo di calcolo e simulazione: descriverò di seguito quali sono stati i passaggi fondamentali effettuati.

Per prima cosa si è proceduto ad una semplificazione della geometria delle piante, vale a dire la forma di perimetri e strutture contenute in esse (ad esempio, curve delimitanti il perimetro degli edifici – ove possibile ed accettabile – sono state trasformate in tratti rettilinei, come anche le sezioni dei pali sono state modificate da circolari a quadrate). Il problema successivo è stato associare ad ogni elemento strutturale (pali, plinti di fondazione, travi, ...) un *unico* valore del modulo di Young E (e del coefficiente di Poisson ν), nonostante la maggior parte delle strutture fossero fatte di calcestruzzo armato (e quindi una combinazione di calcestruzzo ed acciaio¹): questo dato che ANSYS, al fine di contraddistinguere elementi di diverso materiale, accetta un unico valore di E e ν per ciascun elemento². A questo proposito, si sono effettuati gli step descritti di seguito:

- ② suddivisione dei vari elementi strutturali in “macro” (pali, travi, plinti di fondazione, pilastri, ...);
- ② per ciascuna macro si è tenuto conto della percentuale di armatura in acciaio prevista dalla norma vigente per una singola sezione di calcestruzzo:
 - i) 0.5 % per pali, platee, plinti, travi di fondazione e solette,
 - ii) 2.5 % per pilastri e setti;
- ② si è infine omogeneizzata la sezione aumentandone le dimensioni³ mantenendo il modulo elastico del calcestruzzo ($E \approx 30$ GPa).

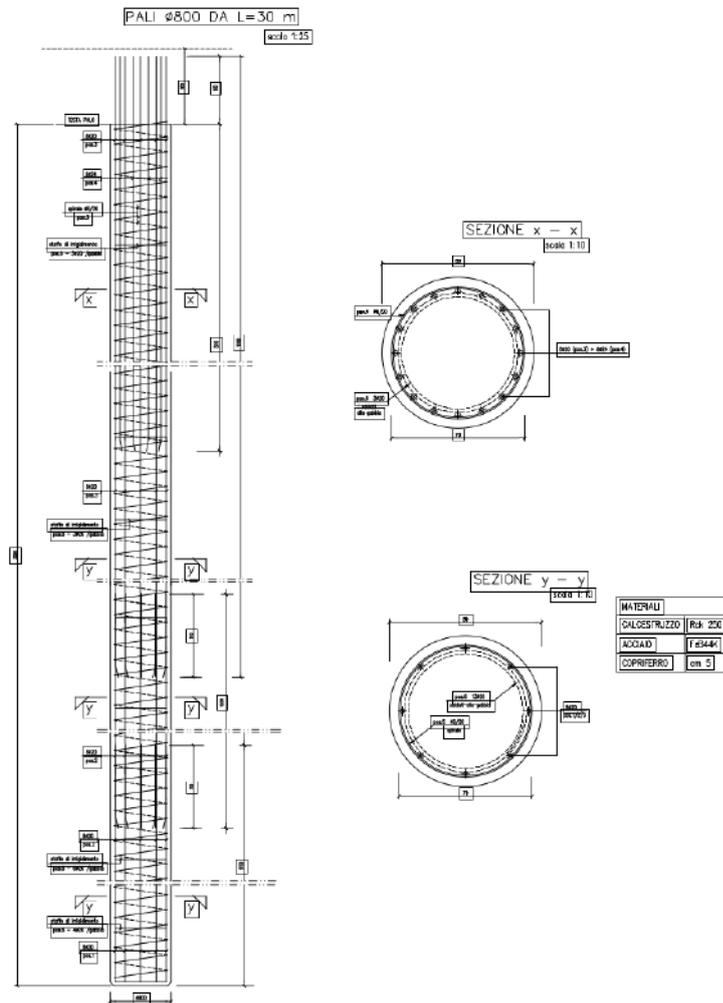


Figura E.1 – Pali da 800 mm di diametro e lunghezza $L = 30$ m dell'edificio terminale del braccio nord [disegni gentilmente offerti dalla Virgo Collaboration].

¹Nello specifico, la struttura di interesse era formata da: calcestruzzo $Rck250$ ed acciaio $FeB44k$.

²Per quanto riguarda il coefficiente di Poisson, si è utilizzato il valore $\nu = 0.25$, a metà tra il valore corrispondente al calcestruzzo ($\nu = 0.2$) e all'acciaio ($\nu = 0.3$).

³Nello specifico, si aumenta il volume dell'elemento strutturale preso in considerazione.

Per chiarire meglio quanto appena descritto, si riporta nel seguito un esempio numerico: si prenda in considerazione uno dei pali in Fig. E.1 (alla pagina precedente) di diametro $d = 800$ mm. Questi elementi strutturali che sostengono l'edificio terminale del braccio nord di Virgo, spingendosi a più di 30 m in profondità nel terreno, sono costituiti di cemento armato. Non essendo a conoscenza del modulo elastico di questo materiale⁴ si calcola la sezione di un singolo palo $A = \pi r^2 \approx 502\,655$ mm², per poi maggiorarla della percentuale di armatura in acciaio prevista (per i pali, ad esempio, 0.5%): $A^* = A \cdot 0.5\% \approx 2513$ mm². Questo valore deve poi essere moltiplicato per il coefficiente di omogeneizzazione n , il quale rappresenta il valore numerico che contraddistingue il rapporto tra moduli elastici dei materiali che compongono il calcestruzzo armato⁵. Si ottiene quindi il valore di maggiorazione della superficie $\tilde{A} = 15 \cdot A^* \approx 37\,695$ mm². Questo procedimento è stato utilizzato per tutte le strutture in cemento armato contenute nel modello.

Una volta rimodellato il disegno su AutoCAD, si sono ricavate le coordinate dei punti utili (rispetto ad un sistema di riferimento "comodo", in cui l'origine è posta verticalmente sotto la massa di test a livello del terreno) per poterlo ricostruire in ANSYS.

E.2 Piante

Di seguito vengono riportate alcune piante, relative al NEB nella Sottosez. E.2.1 ed al CEB nella Sottosez. E.2.2.

E.2.1 NEB

Innanzitutto, si riporta in Fig. E.2 la pianta originaria delle fondazioni del NEB.

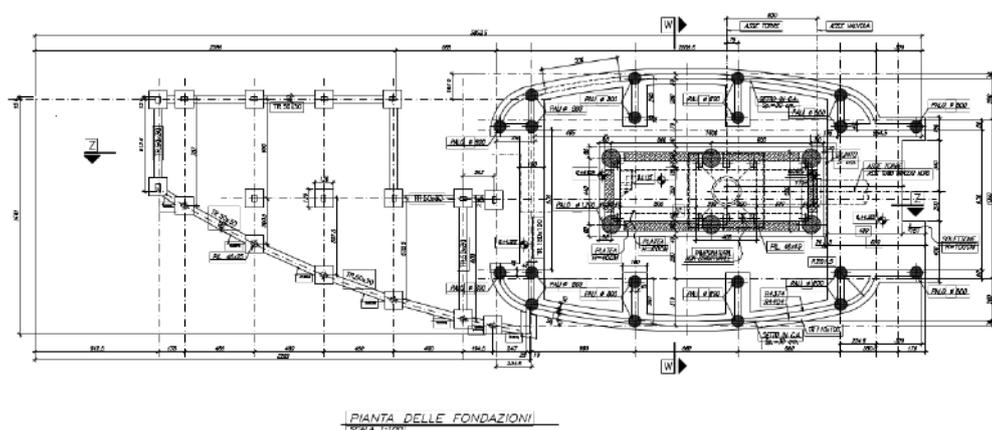


Figura E.2 – Pianta delle fondazioni dell'edificio terminale nord (NEB) di Virgo, gentilmente offerta dalla Virgo Collaboration.

⁴Il valore del modulo elastico del cemento armato dipende sia dalla quantità di acciaio presente nel calcestruzzo, sia dalla disposizione dello stesso al suo interno; inoltre, è anche funzione della temperatura e del tempo trascorso.

⁵Il valore di tale coefficiente, nell'ipotesi di un comportamento perfettamente elastico e lineare del cemento armato, risulterebbe nel range $5 \div 10$; siccome l'andamento del materiale in questione non è semplice quanto ipotizzato, ma soggetto a fenomeni viscosi, le norme tecniche di costruzione prevedono un valore di n fissato a 15.

Di seguito, nell'ordine, la medesima pianta "ripulita" tramite AutoCAD (Fig. E.3) con la sua successiva semplificazione geometrica completa di coordinate (Fig. E.4), ed infine la sovrapposizione tra la pianta originale e quella rimodellata (Fig. E.5).

Quelli descritti nella precedente sequenza sono stati i passaggi principali che si sono effettuati al fine di ottenere una modellizzazione (meglio descritta nella Sez. E.1 precedente) quanto più fedele possibile ai disegni originari: in Fig. E.6 è riportato il render del modello finale fatto girare in ANSYS.

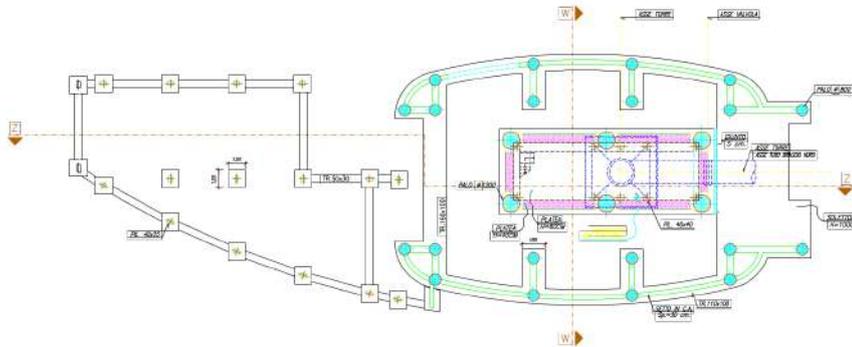


Figura E.3 – Pianta delle fondazioni dell'edificio terminale Nord (NEB) "ripulita" utilizzando AutoCAD.

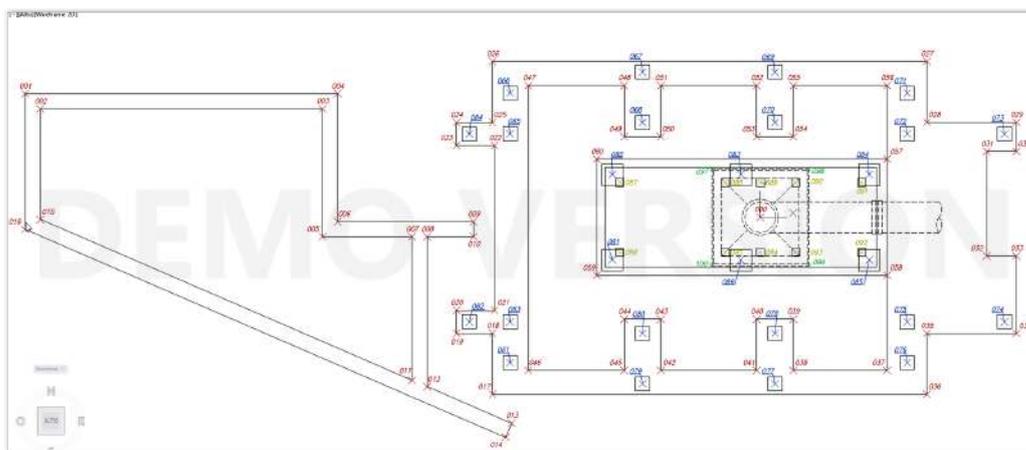


Figura E.4 – Semplificazione geometrica della pianta in Fig. E.3 in cui sono state trovate le coordinate (x, y, z) dei principali elementi strutturali al fine di poter ricostruire il modello in ANSYS.

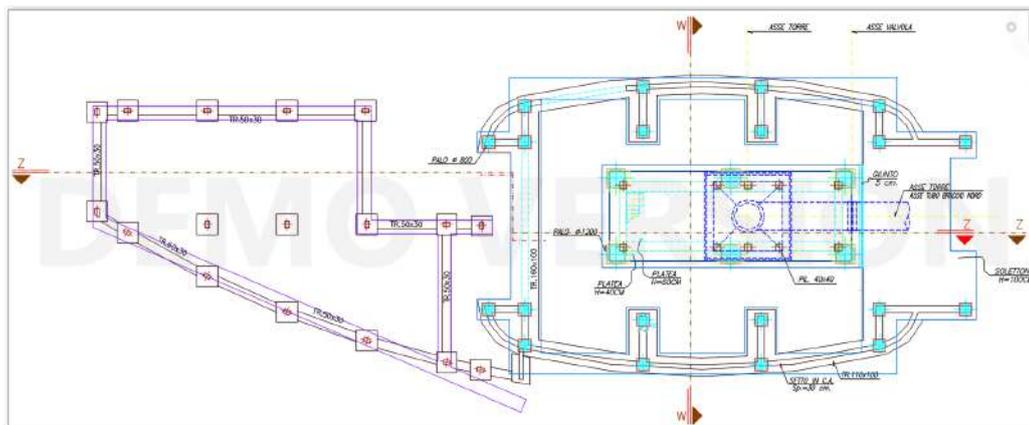


Figura E.5 – Sovrapposizione tra la pianta in Fig. E.3 e quella rimodellata in Fig. E.4 del NEB.

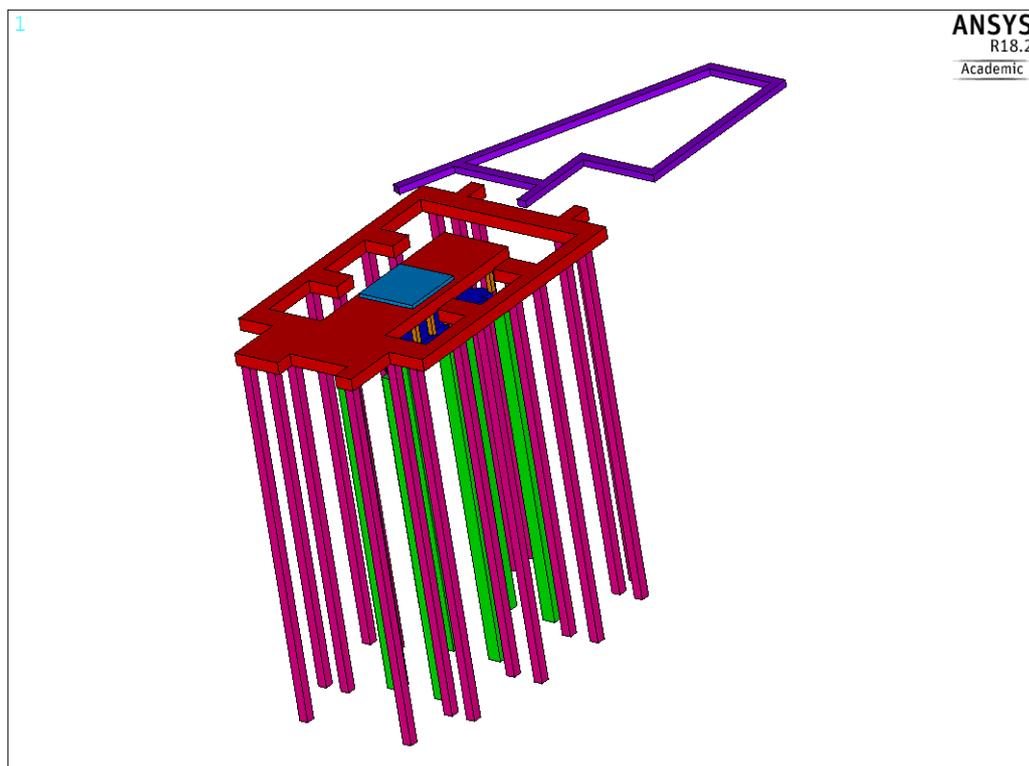


Figura E.6 – Render finale dell'edificio terminale nord (NEB) generato in output da ANSYS: sono raffigurati i pali di fondazione in rosa e verde rispettivamente di lunghezza 30 m e 52 m, in rosso la piattaforma su cui poggia la torre ed in blu la base della torre stessa. Affiancata, in viola, è visibile una struttura secondaria, non direttamente legata alle operazioni sperimentali, ma non trascurabile nella simulazione ai fini dell'effetto del rumore sismico.

E.2.2 CEB

Il medesimo procedimento è stato adottato per il CEB, di cui però si riportano solo le piante finali rimodellate nelle Fig. E.7 e E.8.

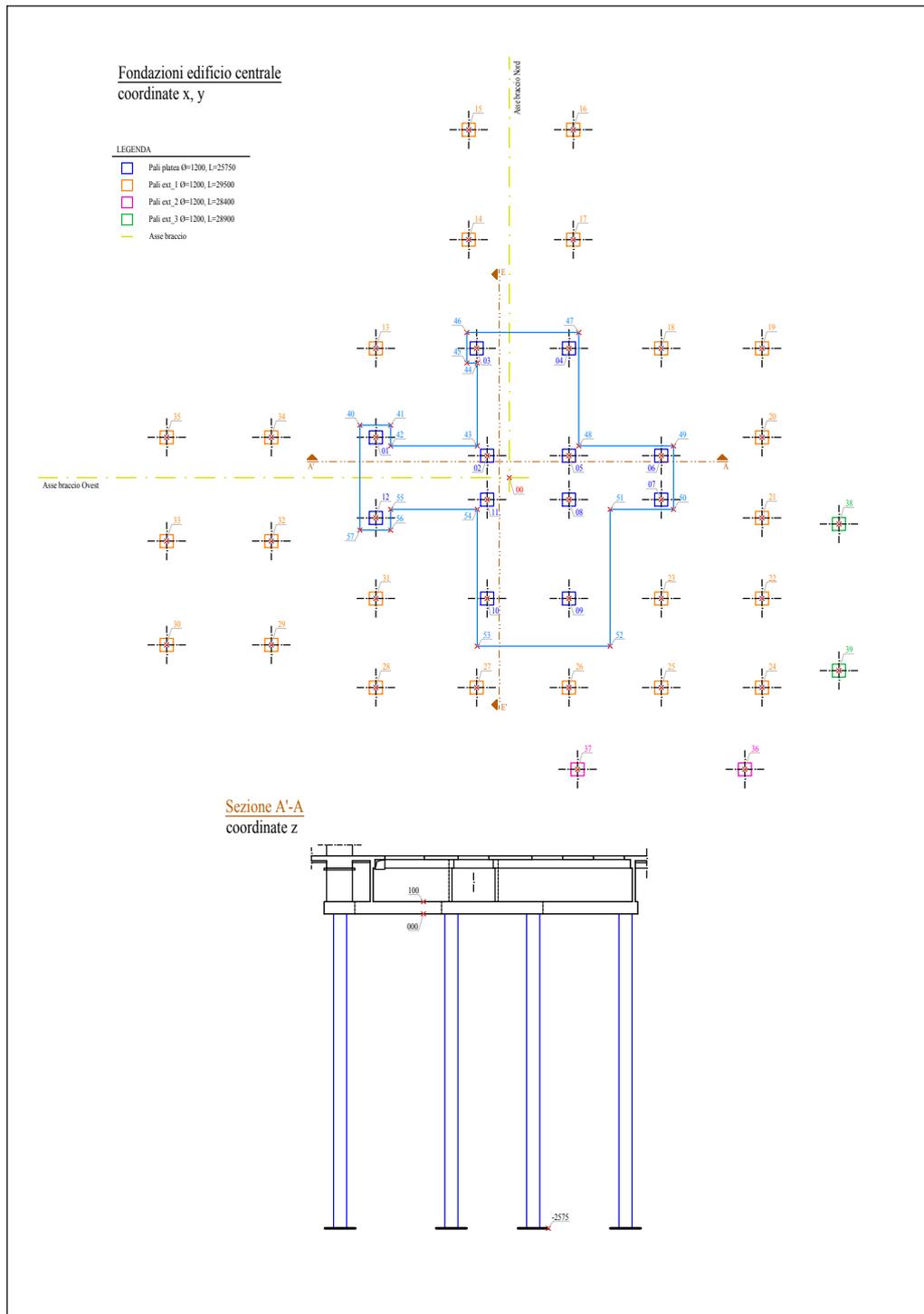


Figura E.7 – Pianta e sezione della palificata dell'edificio centrale (CEB) di Virgo con evidenziata la mappa delle coordinate (x, y, z) al fine di una ricostruzione della struttura semplificata in ANSYS.

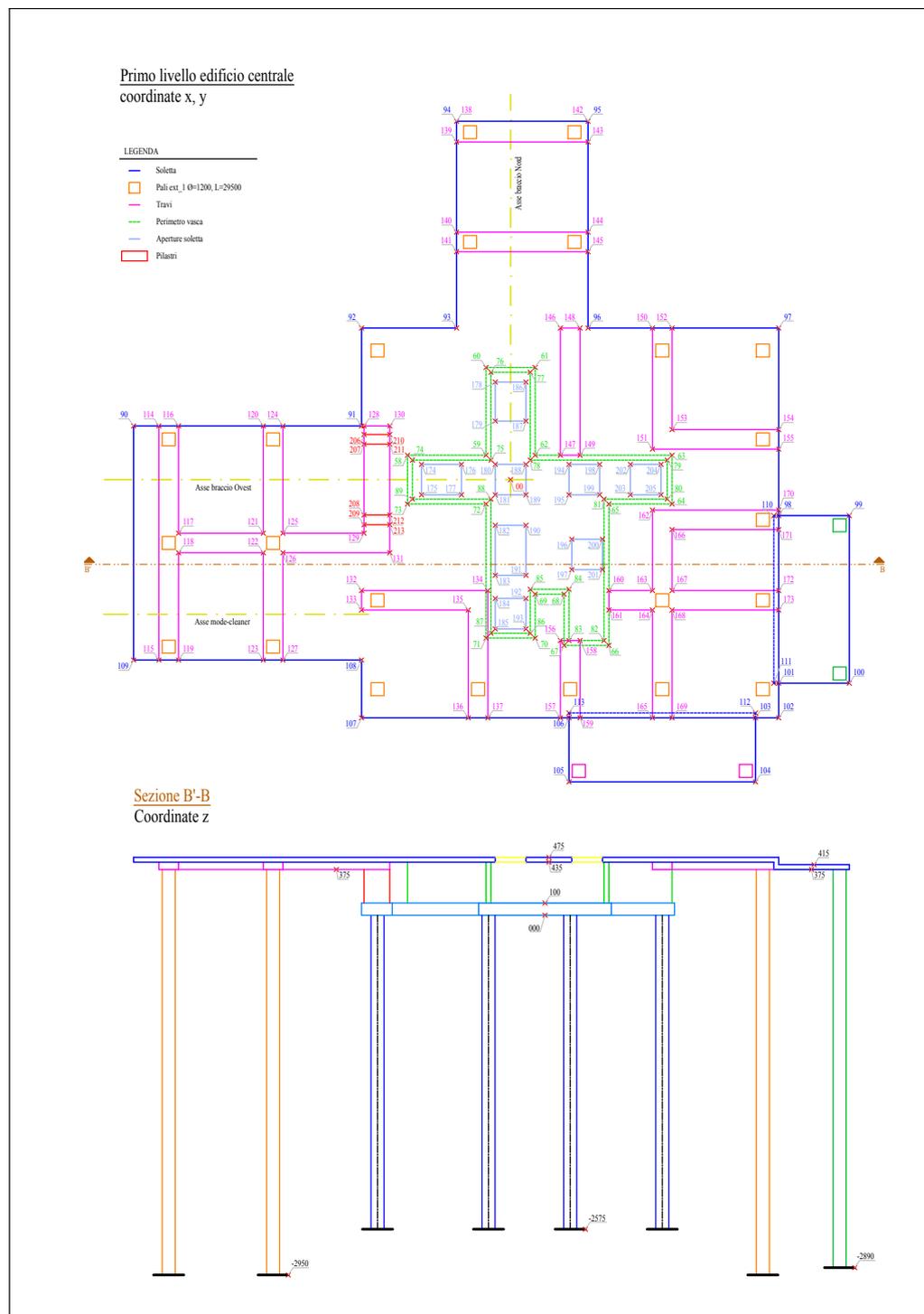


Figura E.8 – Pianta e sezione del primo livello dell'edificio centrale di Virgo (CEB) con evidenziata la mappa delle coordinate (x, y, z) al fine di una ri-modellizzazione in ANSYS.

APPENDICE F

SCELTA DEL PASSO DELLA MESH

In generale, in assenza di vincoli particolari, un sistema con N gradi di libertà consta di N modi normali di vibrazione. Tramite la diagonalizzazione della matrice che descrive il sistema stesso, per piccole oscillazioni, si ottengono tanti autovalori quanti sono i gradi di libertà del sistema. Ad esempio, questo è vero per un sistema elastico di molle descritto in seconda quantizzazione.

Nel caso in cui un modello sia caratterizzato da interazione tra le masse (con interazione non puramente armonica), questa uguaglianza tra numero di gradi di libertà e numero di modi normali non risulta essere più vera. Il numero di gradi di libertà risultante dalla diagonalizzazione è sempre inferiore al numero di gradi di libertà totali del sistema, in quanto si ha una relazione che lega alcuni di essi. Sempre riferendoci all'esempio elastico in seconda quantizzazione, se una delle molle venisse sostituita con un'astina rigida, nominalmente avremmo ancora N gradi di libertà totali ma alcuni di essi (2 in questo esempio) non risulterebbero più indipendenti: lo spazio dei parametri nel quale si trovano le soluzioni verrebbe pertanto ridotto di una dimensione a causa del vincolo.

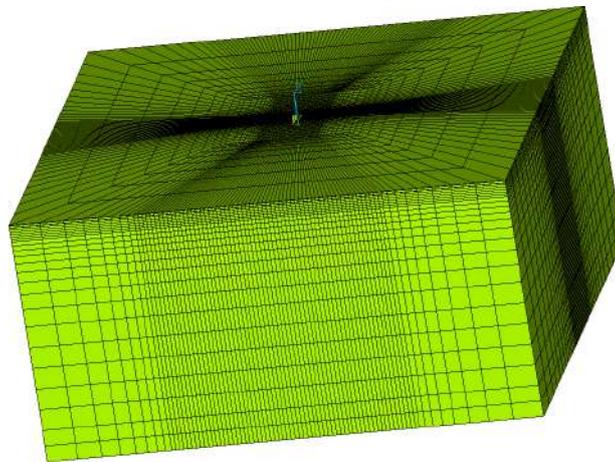


Figura F.1 – Mesh non uniforme costruita tramite ANSYS su un modello semplificato: è evidente un andamento meno fine man mano che ci si allontana dal building, posto nell'origine degli assi.

F.1 Lunghezza d'onda e finezza della mesh

Nel caso dei modelli simulati in ANSYS [39], la forza di legame tra gradi di libertà (prima esemplificata da una astina rigida) è presente in modo molto marcato e viene rappresentata tramite il coefficiente di Poisson ($\nu \approx 0.25$): esso lega meccanicamente il moto trasverso del solido in questione con quello longitudinale. Questo fatto ha come conseguenza quella di ridurre i gradi di libertà effettivi del sistema. Di quanto questi vengano ridotti dipende dalla lunghezza d'onda minima (e quindi dalla massima frequenza dei modi normali) che risulta confrontabile con il passo della mesh: tale lunghezza d'onda (λ_{\min}) rappresenta il limite oltre il quale la matrice del sistema non risulta più diagonalizzabile.

Per il modello di test descritto nella Sez. 5.1 si era inizialmente optato, al fine di evitare dannose riflessioni da parte delle sollecitazioni rappresentati il campo sismico, di costruire una mesh più lasca nella zona esterna rispetto a quella entro la quale sarebbero stati posizionati i sensori sismici (Fig. F.1). Essendo i modi normali valutati sul sistema completo, i risultati della simulazione erano caratterizzati da un cut-off ad alte frequenze, siccome la lunghezza d'onda equivalente λ_{eq} risultava più piccola degli elementi di mesh.

Per ovviare a questo limite, si è deciso di fare uso di una mesh uniforme (Fig. F.2): questa scelta elimina il cut-off ma, avendo dovuto limitare le dimensioni del modello di test per difficoltà legate all'implementazione numerica (tempo macchina e memoria), rimane il problema legato alle riflessioni indesiderate.

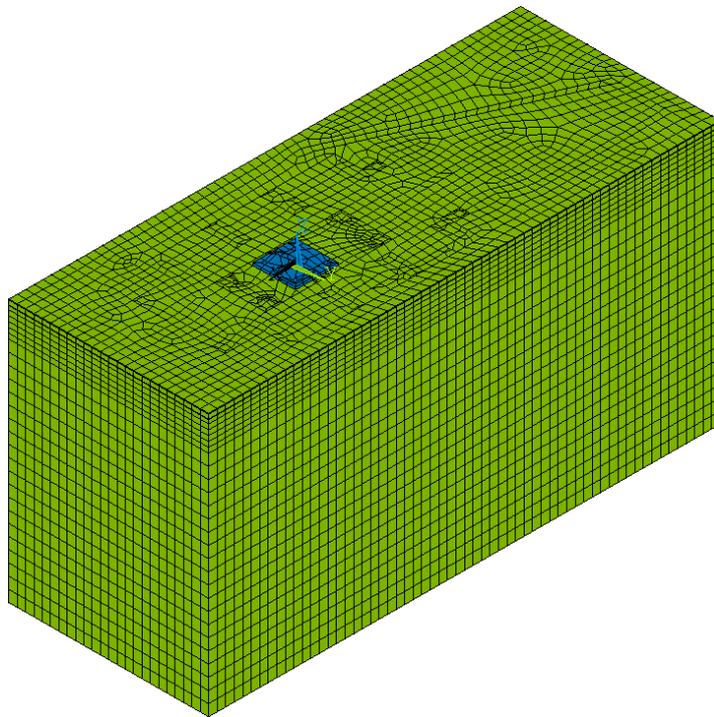


Figura F.2 – Modello semplificato con mesh uniforme costruito tramite ANSYS: il building è posizionato nell'origine degli assi.

BIBLIOGRAFIA

- [1] S. M. Carroll, “Spacetime and geometry: An introduction to general relativity,” San Francisco, USA: Addison-Wesley (2004) 513 p
- [2] T. A. Moore, “A General Relativity Workbook,” Pomona College, USA: (2010) 440 p
- [3] M. Maggiore, “Gravitational Waves. Vol. 1: Theory and Experiments,” Oxford, UK: Oxford University Press (2008) 554 p
- [4] R. M. Wald, “General Relativity,” DOI:10.7208/chicago/9780226870373.001.0001
- [5] B. P. Abbott et al., “Observation of Gravitational Waves from a Binary Black Hole Merger,” Phys. Rev. L, 116(6):061102, 2016
- [6] Virgo website: <https://www.virgo-gw.eu/>
- [7] B. P. Abbott et al., “Prospects for observing and localizing gravitational-wave transients with Advanced LIGO, Advanced Virgo and KAGRA,” Living Rev Relativ (2018) 21:3, DOI:<https://doi.org/10.1007/s41114-018-0012-9>
- [8] The Virgo Collaboration, “Advanced Virgo Technical Design Report,” Technical Report: VIR-0128A-12, 2012
- [9] M. Bassan, “Advanced Interferometers and the Search for Gravitational Waves,” Springer (2014) 387 p
- [10] M. C. Tringali et al., “Seismic array measurements at Virgo’s West End Building for the configuration of a Newtonian-noise cancellation system,” DOI:10.1088/1361-6382/ab5c43
- [11] R. Weiss, “Electromagnetically coupled broadband gravitational antenna,” MIT Res. Lab. Electron. Q. Prog. Rep, 105:54–76, 1972
- [12] P. R. Saulson, “Terrestrial gravitational noise on a gravitational wave antenna,” Phys. Rev. D, 30:732–736, 08 1984

-
- [13] D. Fiorucci, J. Harms, M. Barsuglia, I. Fiori, and F. Paoletti, “Impact of infrasound atmospheric noise on gravity detectors used for astrophysical and geophysical applications,” *Phys. Rev. D*, 97:062003, Mar 2018
- [14] J. Harms, “Terrestrial Gravity Fluctuations,” *Living Rev. Relativity*, 18, (2015), 3, DOI:10.1007/lrr-2015-3
- [15] L. Naticchioni, “Low Frequency Noise Suppression for the Development of Gravitational Astronomy,” *Tesi di Dottorato di Ricerca in Astronomia*, La Sapienza Roma, 2013
- [16] G. F. Miller and H. Pursey, “On the partition of energy between elastic waves in a semi-infinite solid,” DOI:<https://doi.org/10.1098/rspa.1955.0245>
- [17] M. W. Coughlin et al., “Implications of Dedicated Seismometer Measurements on Newtonian-Noise Cancellation for Advanced LIGO,” *Phys. Rev. L*, 121, 221104 (2018), DOI:10.1103/PhysRevLett.121.221104
- [18] S. V. Vaseghi, “Advanced Digital Signal Processing and Noise Reduction,” John Wiley and Sons (2006) 514 p
- [19] M. G. Beker et al., “Improving the sensitivity of future GW observatories in the 1–10 Hz band: Newtonian and seismic noise,” *Gen Relativ Gravit* (2011) 43:623–656, DOI:10.1007/s10714-010-1011-7
- [20] J. C. Driggers, J. Harms, and R. X. Adhikari, “Subtraction of Newtonian noise using optimized sensor arrays,” *Physica Review D* 86, 102001 (2012), DOI:10.1103/PhysRevD.86.102001
- [21] A. Bacchetto, “Introduzione al Metodo degli Elementi Finiti e alla modellazione FEM,” website: <http://www.adepron.it>
- [22] A. V. Pichugin, “Approximation of the Rayleigh wave speed,” Preprint submitted to Elsevier Science, 10 January 2008
- [23] H. Lamb, “On the propagation of Tremors over the Surface of an Elastic Solid,” *Phil. Trans. R. Soc. Lond. A*, 203(359-371):1–42, 1904
- [24] C. L. Pekeris, “The seismic surface pulse,” *Proc. Nat. Acad. Sci.*, 41:469–480, 1955
- [25] C. C. Chao, “Dynamical Response of an Elastic Half-Space to Tangential Surface Loadings,” *Journal of Applied Mechanics*, 27(3):559–567, 1960
- [26] P. G. Richards, “Elementary solutions to lamb’s problem for a point source and their relevance to three-dimensional studies of spontaneous crack propagation,” *Bulletin of the Seismological Society of America*, 69(4):947–956, 1979
- [27] E. Kausel, “Lamb’s problem at its simplest,” *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 469(2149), 2013
- [28] L. R. Johnson, “Green’s function for lamb’s problem,” *Geophysical Journal International*, 37(1):99–131, 1974

-
- [29] J. McKenna, M. McKenna, S. Yushanov, J. Crompton, and K. Koppenhoefer, “Computational modeling of wave propagation in a geophysical domain,” Technical report, 2008
- [30] M.G. Beker et al., “Towards time domain finite element analysis of gravity gradient noise,” 2010 J. Phys: Conf. Ser. 228 012034
- [31] A.A.V.V., “Lamb’s problem,” PLAXIS 2016 Technical Note
- [32] G. Utica, “Caratterizzazione dell’attrito nelle guide lineari a ricircolo di rulli attraverso prove sperimentali per lo sviluppo della modellizzazione FEM,” Tesi di Laurea, Politecnico di Milano, A.A. 2011-2012
- [33] S. Youzhi, “Contribution of Rayleigh Damping Parameters to Site Response under Influence of Rayleigh Wave,” DOI:10.21311/001.39.6.06
- [34] G. Lanzo, A. Pagliaroli and B. D’Elia, “Influenza della modellizzazione di Rayleigh dello smorzamento viscoso nelle analisi di risposta sismica locale,” XI Congresso Nazionale “L’Ingegneria Sismica in Italia”, Genova 25-29 Gennaio 2004
- [35] R. J. Barlow, “Statistics: A Guide to the Use of Statistical Methods in the Physical Sciences,” John Wiley and Sons (1989) 206 p
- [36] H. Risken, “The Fokker–Planck Equation: Methods of Solution and Applications,” Springer (1996) 472 p
- [37] R. Hunger, “An Introduction to Complex Differentials and Complex Differentiability,” Technical Report, TUM-LNS-TR-07-06, 2007
- [38] A. Cirone, “Magnetic and Newtonian noises in Advanced Virgo: evaluation and mitigation strategies,” Tesi di Dottorato di Ricerca in Fisica, UniGE, 2020
- [39] S. Farinon, “Calcolo ad elementi finiti per applicazioni ai problemi di fisica,” Slide per Corso di Laurea, UniGE

RINGRAZIAMENTI

Ecco giunti alla parte più difficile della scrittura: i ringraziamenti.

Sono veramente tante (troppe!) le persone a cui devo tanto, senza le quali questo lavoro non sarebbe stato possibile. Prima di tutto, vorrei ringraziarne due in particolare: il mio relatore Andrea Chincarini e Stefania Farinon, che nonostante sulla carta non sia “etichettata” alla stessa maniera è stata per me un punto di riferimento. Senza di loro, infatti, non sarei riuscita a scrivere (e a comprendere) nemmeno la metà del contenuto di questa tesi. Andrea (che ormai è diventato per me “il Chinca”) si è sempre reso disponibile, cercando di aiutarmi e guidarmi nella giusta direzione, praticamente in qualsiasi momento; che fosse dopo l’orario di lavoro, nel week-end, durante le vacanze estive o ancora di ritorno in moto verso casa – e di questo la ringrazio e mi scuso ancora profondamente –. Stefania non è stata da meno, avendo dedicato molto del suo tempo all’inizio per insegnarmi ad utilizzare il software di simulazione impiegato nella tesi, e quando le simulazioni stesse hanno cominciato a diventare troppo complicate non ha esitato a venire in mio aiuto, facendosi carico di gran parte del lavoro. Entrambi, inoltre, sono stati molto gentili e comprensivi nei mesi in cui sono stata poco bene. Mi ritengo davvero fortunata nell’aver avuto al mio fianco due persone come loro. Desidero quindi ringraziarli davvero di cuore per avermi sempre supportata, e aver fatto in modo che questa non fosse “solo” una tesi ma un buon lavoro. Ringrazio inoltre il mio correlatore Fabrizio Parodi, che si è dimostrato molto interessato all’argomento e di conseguenza mi ha sempre fornito ottimi consigli.

Un ringraziamento particolare va anche a tutti gli amici del mitico “Lab-307”, non avrei potuto trovare compagni migliori. Di quelli che sono capaci a tirarti su il morale quando ne hai bisogno, che hanno davvero piacere ad aiutarti senza chiedere nulla in cambio e, ancora, di quelli a cui pensi durante gli interminabili viaggi da Loano a Genova con Trenitalia solo per le pause caffè insieme (in effetti, davvero tante!). Vorrei ringraziare in particolar modo Luca, per aver risolto ogni volta tutti i problemi informatici che mi tormentavano ed Alessio, che ha sopportato e risposto a tutte le mie domande sul newtoniano essendo il mio dottorando di riferimento!

Tra loro, la mia compagna e grande amica Barbara Garaventa (non ti offendere Baby: scrivo nome e cognome completo solo per fare sapere a tutti chi tu sia!). Se non fosse stato per lei e per la sua inaspettata e genuina sincerità, non avrei nemmeno intrapreso il corso di studi della Magistrale. Ricordo ancora quando il primo giorno di lezione, senza esserci nemmeno presentate, mi hai guardato e mi hai detto, dopo

un breve saluto: “certo che la tua maglia è proprio brutta!”. Memorabile. Per me è stato l’inizio di una grande amicizia. Lei è la persona che più di tutti mi ha sempre supportata, in ogni situazione, cercando di farmi vedere quello che molto spesso io non vedo, non solo nello studio e nel lavoro ma anche nella vita di tutti i giorni: la fiducia in sé stessi. Insieme a lei, non posso non ricordarmi di Matte, ovviamente, ottimo scacchista e anche lui grande amico.

Sono profondamente grata e riconoscente inoltre a Guido, il mio amico geniale, che per tanti anni mi ha aiutato a superare tutte le difficoltà che incontravo nella via tortuosa della fisica; mi stupisco ancora adesso di quante cose sappia. Anche lui, si è sempre fatto in quattro per aiutarmi.

Giunti a questo punto è il momento della mia famiglia: mamma Ivonne, papà Massimo e mio fratello Francesco. Tutti, ognuno a modo suo, hanno fatto sì che io potessi diventare la persona che sono ora, spero tutto sommato, una brava persona. Grazie al loro continuo supporto sono riuscita sempre a rialzarmi da ogni sconfitta ed imprevisto incontrati lungo questo cammino, che per me è stato molto difficile e faticoso, ma che sono riuscita a concludere grazie non solo alla mia testardaggine ma soprattutto grazie alle persone che ho avuto, e ho intorno tuttora.

Ultimo ma non ultimo, il mio compagno di vita e di avventure Angelo. Più di tutti ha dovuto silenziosamente tollerare i miei scostanti cambi di umore durante il periodo di tesi, aiutandomi quanto più possibile, ad esempio facendomi un sorriso nei momenti di tristezza, rinunciando alle partite alla X-box per insegnarmi ad usare AutoCAD, ma anche banalmente nella vita di tutti i giorni: ha davvero lavato molti piatti.